
WdM - Lista 7 (ćwiczenia 19 XI 2025)

Zad. 1 Mamy dane funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zapisz symboliczne poniższe zdania.

- a) f jest ograniczona z dołu.
- b) f jest ograniczona.
- c) Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których wartość funkcji f jest mniejsza od wartości funkcji g .
- d) Żadna wartość funkcji f nie jest miejscem zerowym funkcji g .
- e) Funkcja f jest niemalejąca na przedziale $[0, 1]$.

Zad. 2 Sprawdź, czy podane funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są różnowartościowe i „na”. Podaj precyzyjne uzasadnienia.

- a) $f(x) = x^3$,
- b) $g(x) = x^6 + 2|x|$,

Zad. 3 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sin x$. Wyznacz

- $f[(0, \pi/2)]$,
- $f^{-1}[[\frac{1}{2}, \infty)]$.

Zad. 4 Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Wyznacz $f[[0, 1]]$, $f[(-2, -1)]$, $f[\{0, 1\}]$, $f^{-1}[(-\infty, 1]]$.

Zad. 5 Wyznacz złożenia $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ w każdym z poniższych przypadków (o ile to możliwe):

- a) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$,
- b) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x}{x-4}$.

Zad. 6 Wyznacz funkcje odwrotne do poniższych

- a) $f: (-\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(2x + 1)$,
- b) $g: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$,
- c) $F: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $F(A) = A^T$.

Zad. 7 Podaj przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która

- a) jest „na”, ale nie jest różnowartościowa,
- b) jest różnowartościowa, a zbiór jej wartości jest ograniczony,
- c) jest „na”, a każda jej wartość jest przyjmowana nieskończenie wiele razy.

Zad. 8 Niech $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Narysuj diagramy wybranych funkcji $f: X \rightarrow X$ i $g: X \rightarrow X$.

- a) Narysuj diagram funkcji $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g \circ g$.
- b) Jak wygląda diagram funkcji stałej? Jak wygląda diagram identyczności? Bijekcji?
- c) Spróbuj wymyślić przykład funkcji h takiej, że $h \circ h$ nie jest stała, ale $h \circ h \circ h$ już jest.

Przez *diagram* funkcji $h: A \rightarrow B$ rozumiemy rysunek zawierający zbiory A i B oraz strzałki obrazujące działanie funkcji h .

Zad. 9 Określamy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dla } x \geq 0, \\ -x - 1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Naszkicuj wykres $f \circ f$. Wyznacz obrazy i przeciwobrazy względem f i $f \circ f$ zbiorów $[0, 1)$ i $[-1, 0)$.

Zad. 10 Sprawdź, czy podane funkcje są różnowartościowe i „na”.

- a) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n, k) = n + k$.
- b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g(n) = \langle 2n, -2n \rangle$.
- c) $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(A) = \min A$.
- d) $\phi: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(f) = f(\frac{1}{2})$.
- e) $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{W}$, $\psi(a, b) = ax^2 + b$.

($C(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{W}$ to zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych).