

---

**WdM - Lista 8** (ćwiczenia 3 XII 2025)

---

**Zad. 1** Rozważmy funkcje

- a)  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n, k) = n + k$ .
- b)  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $g(n) = \langle 2n, -2n \rangle$ .
- c)  $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $h(A) = \min A$ .
- d)  $\phi: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi(f) = f(\frac{1}{2})$ .
- e)  $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{W}$ ,  $\psi(a, b) = ax^2 + b$ ,
- f)  $w: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{W}$ ,  $w(A) =$  wielomian charakterystyczny  $A$ .

( $C(\mathbb{R})$  to zbiór wszystkich funkcji ciągłych  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{W}$  to zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych). Wyznacz

- a)  $f[\{0, 1, 2\} \times \{0, 2\}]$ ,  $f^{-1}[\{2\}]$ ,
- b)  $g^{-1}[\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}]$ ,
- c)  $h[\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) \setminus \{\emptyset\}]$ ,
- d)  $\phi[K]$ , gdzie  $K$  jest zbiorem wszystkich funkcji wielomianowych o współczynnikach rzeczywistych,
- e)  $\psi^{-1}[L]$ , gdzie  $L$  jest zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej 1,
- f)  $w[D]$ , gdzie  $D$  jest zbiorem macierzy diagonalnych.

**Zad. 2** Wyznacz złożenia funkcji  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $g \circ g$  w przypadkach, w których to możliwe:

- a)  $f: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(A) = \det(A)$ ,  $g: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $g(A) = A^2$ .
- b)  $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(w) = w(1)$ ,  $g: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ ,  $g(w) = x \cdot w$ .
- c)  $f: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ,  $f(h) = h^{-1}[\{0\}]$ ,  $g: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ,  $g(A) = A \cup [0, 1]$ .

( $C(\mathbb{R})$  to zbiór wszystkich funkcji ciągłych  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{W}$  to zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych).

Które z tych funkcji są różnowartościowe, a które „na”?

**Zad. 3** Podaj przykład funkcji  $f: X \rightarrow Y$  i zbiorów  $A, B \subseteq X$  takich, że

$$f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B].$$

**Zad. 4** Rozważmy funkcję  $f: X \rightarrow Y$  i  $A, B \subseteq Y$ . Naśladując rozumowania przeprowadzone na wykładzie, wykaż, że  $f^{-1}[B \setminus A] = f^{-1}[B] \setminus f^{-1}[A]$ .

**Zad. 5** Zdefiniujmy  $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$  w następujący sposób

$$A = \{\langle k, X \rangle \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : k \in X\}.$$

Znajdź obraz zbioru  $A$  przez rzut  $\pi_{\mathbb{N}}$  na pierwszą oś i obraz zbioru  $A$  przez rzut  $\pi^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$  na drugą oś.

**Zad. 6** Niech  $F: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$F((a_n)) = a_2.$$

- a) Czy funkcja  $F$  jest różnowartościowa?
- b) Znajdź  $F[\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ jest zbieżny do } 0\}]$ .