
WdM - Lista 9 (ćwiczenia 10 XII 2025)

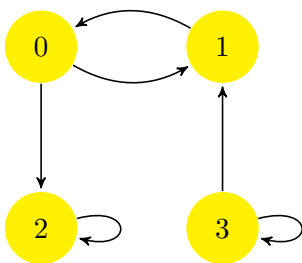
Zad. 1 Podaj przykład niepustej relacji R na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$ spełniającej poniższe własności lub wykaż, że takowa nie istnieje:

- a) R jest zwrotna, symetryczna i nieprzechodnia,
- b) R jest symetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna,
- c) R jest symetryczna i słabo antysymetryczna.

Zad. 2 Rozważmy poniższe relacje R na X zdefiniowane przez następujące funkcje zdaniowe. Jakie własności mają te relacje? Sprawdź zwrotność, symetrię, słabą antysymetrię i przechodniość. Czy dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $xRy \vee yRx$?

- a) $X = \mathbb{R}, xRy \iff x < y$,
- b) $X = \mathbb{R}, xRy \iff x > y$,
- c) $X = \mathbb{R}, xRy \iff x \neq y$,
- d) $X = \mathbb{Z}, nRk \iff n \cdot k \geq 0$,
- e) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}), ARB \iff A \cap B \neq \emptyset$,
- f) X jest zbiorem wszystkich wektorów w $\mathbb{R}^2, \vec{v}R\vec{w} \iff \exists r > 0 \vec{v} = r \cdot \vec{w}$,
- g) $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (zbiór ciągów liczb rzeczywistych), $(a_n)R(b_n) \iff (a_n)$ jest podciągiem (b_n) ,
- h) $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, fRg \iff \{n \in \mathbb{N}: f(n) > g(n)\}$ jest skończony,
- i) $X =$ Zbiór podpunktów tego zadania, $pRp' \iff p$ jest trudniejszy od p' .

Zad. 3 Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ma następujący diagram:



- a) Czy ta relacja jest przechodnia?
- b) Wyznacz dopełnienie zbioru $\{\langle x, y \rangle: (xRy) \implies (yRx)\}$.
- c) Czy prawdziwe jest zdanie $\exists x \in X \forall y \in X (yRx \vee 3Ry)$?
- d) Czy można dodać do powyższego diagramu strzałki tak, żeby R stała się relacją słabo antysymetryczną?