## Fakty z wykładu

**Uwaga.** Poniższe fakty zostały podane na wykładzie i możecie z nich korzystać na kolokwium i egzaminie. Korzystając z nich trzeba się jednak zawsze na nie **powołać**. Nie powinniście się też powoływać na inne *nietrywialne* fakty z teorii mnogości.

Następujące zbiory są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych:

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, rodzina skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$.

Następujące zbiory są równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych:

- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $(a,b)$ (przedział otwarty), $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^n$ (dla $n \in \mathbb{N}$), $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Twierdzenia udowodnione (lub prawie udowodnione) na wykładzie:

- $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$,
- zwrotność, symetria i przechodniość równoliczności,
- zwrotność, przechodniość $\leq$,
- twierdzenie Cantora-Bernsteina: jeśli $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$, to $|A| = |B|$.
- fakt: jeżeli $A \subseteq B$, to $|A| \leq |B|$.
- twierdzenie o sumie: jeśli $|A| = |C|, |B| = |D|$ i $A \cap B = C \cap D = \emptyset$, to $|A \cup B| = |C \cup D|$.
- twierdzenie o zbiorze potęgowym: jeśli $|A| = |B|$, to $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$,
- twierdzenie o iloczynie kartezjańskim: jeśli $|A| = |B|$ i $|C| = |D|$, to $|A \times C| = |B \times D|$,
- twierdzenie o zbiorze funkcji: jeśli $|A| = |B|$ i $|C| = |D|$, to $|A^C| = |B^D|$,
- twierdzenie o potęgowaniu: $|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|$.
- twierdzenie Cantora: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- fakt: suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.
- fakt: jeżeli $A$ jest nieskończony, a $B$ jest skończony, to $|A \setminus B| = |A|$ i $|A \cup B| = |A|$.
- fakt: jeżeli $A$ jest nieprzeliczalny, a $B$ jest przeliczalny, to $|A \setminus B| = |A|$.
- $|\{0,1\}^A| = |\mathcal{P}(A)|$ dla każdego zbioru $A$.