

ALGEBRA 1, Lista 1

Ćwiczenia 7.10.2025.

Oznaczenia zadań i ich części: S: do samodzielnego wykonania.

- 0S. Materiał teoretyczny (definicje, twierdzenia, przykłady): działanie w zbiorze, łączność, przemienność, element neutralny. Definicja grupy i pierwsze przykłady grup. Transport działania poprzez bijekcję.
1. Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny.
 - (a)S $A = \mathbb{N}_{>0}$; $m * n = \text{NWD}(m, n)$.
 - (b)S $A = \mathbb{N}_{>0}$; $m * n = \text{NWW}(m, n)$.
 - (c)S $A = \mathbb{N}$; $m * n = 2^{mn}$.
 - (d)S $A = \mathbb{N}$; $m * n = m2^n$.
 - (e)S $A = \mathbb{R}$; $m * n = (m + n)^2$.
 - (g)S $A = \mathbb{N}_{>0}$; $m * n = m^n$.
 2. Dla $r > 0$ niech $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.
 - (a) Narysować na płaszczyźnie Gaussa zbiór K_r .
 - (b) Dla których $r > 0$ mnożenie liczb zespolonych jest działaniem w zbiorze K_r ?
 3. Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny. Sprawdzić też, czy $(A, *)$ jest grupą.
 - (a) $A = \mathbb{Q}$; $a * b = \frac{a+b}{2}$.
 - (b) $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $a * b = \frac{a}{b}$.
 - (c) $A = \mathbb{R}$; $x * y = x + y + 2$.
 - (d) $A = \mathbb{N}$; $m * n = \min(m, n)$.
 - (e) $A = \mathbb{N}$; $m * n = \max(m, n)$.
 - (f) $A = \mathbb{N}$; $m * n = m$.
 - (g) $A = \mathbb{N}$; $m * n = 2^{m+n}$.
 - (h) $A = \mathbb{Z}$; $m * n = m - n$.
 - (i) A to płaszczyzna; $P * Q$ to środek odcinka o końcach P, Q .
 4. Załóżmy, że $f : A \rightarrow B$ jest bijekcją, $\circ$ jest działaniem na zbiorze A i $*$ jest działaniem indukowanym w zbiorze B przez działanie $\circ$ poprzez funkcję f . Udowodnić, że:
 - (a) jeśli $\circ$ jest przemienne, to $*$ jest przemienne (na wykładzie był dowód analogicznego faktu dla łączności);
 - (b) jeśli $\circ$ ma element neutralny w A , to $*$ ma element neutralny w B ;
 - (c) jeśli $(A, \circ)$ jest grupą, to $(B, *)$ jest grupą.
 5. Załóżmy, że $\circ$ jest działaniem łącznym w skończonym zbiorze A . Udowodnić, że istnieje $a \in A$ takie, że $a \circ a = a$.

Wskazówka

Dla $x \in A$ oraz $l > 0$ niech x^l oznacza $\underbrace{x \circ \dots \circ x}_{l \text{ razy}}$.

- (a) Zauważyć, że dla każdych $k, l > 0$ oraz $x \in A$ mamy:

$$(x^k)^l = x^{kl}, \quad x^k x^l = x^{k+l}.$$

- (b) Dla $c \in A$ rozważyć elementy c^{2^k} , gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$ i znaleźć $b \in A$ oraz $l \geq 2$, takie że $b^l = b$.

- (c) Udowodnić, że jeśli b i l są jak w (b) powyżej, to dla $a := b^{l-1}$ mamy $a \circ a = a$.

6. Podać przykład działania $*$ na zbiorze $\{0, 1\}$, takiego że

$$0 * (0 * 0) \neq (0 * 0) * 0.$$

Ile istnieje takich działań?