

Ćwiczenia 13.01.2026 i Konwersatorium 15.01.2026.

- 0S. Materiał teoretyczny: Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy: definicja. Pierścień Gaussa i pierścień wielomianów nad ciałem jako pierścienie euklidesowe. Podzielność i elementy stowarzyszone w pierścieniu R . Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność w pierścieniu R . Istnienie największego wspólnego dzielnika w pierścieniu euklidesowym. Algorytm Euklidesa w $\mathbb{Z}$ oraz w dowolnym pierścieniu euklidesowym R . Twierdzenie Bézout.
- 1K. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:
- $X^2 + 3X + 8$ przez $X + 1$ w $\mathbb{R}[X]$;
 - $X^2 + 3X + 3$ przez $X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
 - $3i$ przez $1 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$.
- 2K. Niech K będzie ciałem. Udowodnić, że w pierścieniu euklidesowym $K[X]$ (normą Euklidesa jest stopień wielomianu) iloraz i reszta w dzieleniu z resztą są wyznaczone jednoznacznie.
- 3K. Załóżmy, że R jest dziedziną, $n \in \mathbb{N}$ i $W \in R[X]$ jest wielomianem stopnia n . Udowodnić, że W ma nie więcej niż n pierwiastków w R (wskazówka: rozważyć ciało ułamków pierścienia R i skorzystać z twierdzenia Bézout).
4. W podanym pierścieniu euklidesowym R , dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy $r, s, t \in R$, takie że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.
- $a = 2891$, $b = 1589$, $R = \mathbb{Z}$.
 - $a = 2X^3 - 4X^2 - 8X + 1$, $b = 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2$, $R = \mathbb{Q}[X]$.
 - $a = X^4 + 2$, $b = X^3 + 3$, $R = \mathbb{Z}_5[X]$.
 - $a = 4 - i$, $b = 1 + i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.
5. Czy w podanym pierścieniu R dane elementy $a, b \in R$ są stowarzyszone?
- $a = 5$, $b = -5$, $R = \mathbb{Z}$.
 - $a = 2$, $b = 4$, $R = \mathbb{Z}$.
 - $a = X + 1$, $b = 5X + 5$, $R = \mathbb{Q}[X]$.
 - $a = X + 1$, $b = 5X + 6$, $R = \mathbb{Q}[X]$.
 - $a = X + 1$, $b = 5X + 5$, $R = \mathbb{Z}[X]$.
 - $a = 1 + i$, $b = 1 - i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.
 - $a = 1 + i$, $b = 2 + i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.
6. Rozstrzygnąć, czy dany element jest odwracalny w danym pierścieniu. Jeśli tak, to znaleźć element odwrotny.
- 105 w $\mathbb{Z}_{351}$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_3)$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_4)$.
 - $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Q})$.
7. Czy funkcja
- $$\delta : \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, \quad \delta(W) = \deg(W)$$
- jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$?
8. Ile pierwiastków ma wielomian $X^3 + 5X \in \mathbb{Z}_6[X]$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_6$? Porównać wynik z zadaniem 3K.