

ALGEBRA 1, Lista 4

Konwersatorium 23.10.2025, Ćwiczenia 28.10.2025.

Niech G będzie grupą, $g \in G$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

- 0S. Materiał teoretyczny: Warstwy lewostronne i warstwy prawostronne podgrupy H grupy G . Własności warstw. Indeks podgrupy H w grupie G . Twierdzenie Lagrange'a oraz wnioski z niego. Małe twierdzenie Fermata. Twierdzenie Wilsona.
- 1S. Wyznaczyć wszystkie możliwe:
- (a) rzędy elementów $g \in \mathbb{Z}_{20}$;
 - (b) rzędy elementów $g \in S_5$;
 - (c) rzędy elementów $g \in D_6$.
- 2S. Załóżmy, że $\text{ord}(g) = 10$. Wyznaczyć $\text{ord}(g^2)$, $\text{ord}(g^5)$, $\text{ord}(g^3)$.
- 3S. Opisać zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych (przez wypisanie wszystkich jego elementów) G/H i $H \backslash G$, dla:
- (a) $G = S_3$, $H = \{\text{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$;
 - (b) $G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$.
- 4K. Załóżmy, że $\text{ord}(g) = n$ i niech $r = r_n(k)$.
- (a) Udowodnić, że $g^k = g^r$.
 - (b) Udowodnić, że $\text{ord}(g^k) = l$, gdzie l jest najmniejszą liczbą ≥ 1 taką, że $n|kl$.
 - (c) Udowodnić, że

$$\text{ord}(g^k) = \frac{n}{\text{NWD}(k, n)}.$$

- (d) Udowodnić, że $\text{ord}(g^k) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy k i n są względnie pierwsze.
- 5K. Wyznaczyć wszystkie możliwe rzędy elementów $g \in D_n$.
6. Niech

$$\mathbb{Z}_n^* := \{k \in \mathbb{Z}_n \mid \text{NWD}(k, n) = 1\}.$$

Udowodnić, że:

- (a) mnożenie modulo n (oznaczane $\cdot_n$) jest działaniem na $\mathbb{Z}_n^*$;
 - (b) $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ jest grupą (łączność $\cdot_n$ była omówiona na wykładzie).
7. Opisać zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych (przez wypisanie wszystkich jego elementów) G/H i $H \backslash G$, dla:
- (a) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = \{0, 6\}$;
 - (b) $G = D_4$, $H = \{\text{id}, O_{\pi/2}, O_{\pi}, O_{3\pi/2}\}$;
 - (c) $G = D_4$, $H = \{\text{id}, S\}$, gdzie S jest dowolną symetrią osiową;
 - (d) $G = S_n$, $H = A_n$, gdzie A_n to zbiór permutacji parzystych w S_n (udowodnić, że A_n jest podgrupą S_n !).
8. Załóżmy, że G jest generowana przez zbiór $\{g, h\} \subseteq G$ taki, że $\text{ord}(g) = 5$, $\text{ord}(h) = 4$ oraz $gh = hg^2$.
- (a) Niech $K = \langle g \rangle$ oraz $H = \langle h \rangle$. Udowodnić, że $K \cap H = \{e\}$.
 - (b) Udowodnić, że każdy element grupy G jest postaci $g^i h^j$ dla pewnych $0 \leq i < 5$ oraz $0 \leq j < 4$ oraz udowodnić, że to przedstawienie jest jednoznaczne. Ile elementów ma grupa G ?
 - (c) Napisać wzór na iloczyn elementów grupy G zapisanych w postaci $g^i h^j$ jak w punkcie (b) powyżej.
9. Obliczyć następujące reszty z dzielenia:

$$r_{13}(125^{342}), \quad r_{29}(321^{485}), \quad r_{31}(321^{485}).$$