

ALGEBRA 1, Lista 5

Ćwiczenia 18.11.2025, Konwersatorium 6.11.2025.

- 0S. Materiał teoretyczny: Homomorfizmy, epimorfizmy, monomorfizmy, endomorfizmy i automorfizmy grup: definicje i przykłady. Twierdzenie Cayley'a. Własności homomorfizmów grup. Jądro i obraz homomorfizmu grup. Dzielnik normalny.
- 1S. Udowodnić, że złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem.
- 2S. Udowodnić, że funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem.
- 3S. Niech G będzie grupą. Udowodnić, że $\text{Aut}(G) \leq S_G$.
- 4K. Załóżmy, że G, H są grupami oraz grupa G jest cykliczna, skończona i generowana przez element a . Załóżmy, że $b \in H$ oraz $\text{ord}(b)$ jest skończony i dzieli $\text{ord}(a)$. Udowodnić, że:
- (a) istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $f : G \rightarrow H$ taki, że $f(a) = b$;
 - (b) każdy endomorfizm $\mathbb{Z}_n$ jest postaci:

$$\varphi_k : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad \varphi_k(x) = k \cdot_n x;$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_n$.

- 5K. Załóżmy, że G jest grupą cykliczną, nieskończoną i generowaną przez element a , H jest dowolną grupą oraz $b \in H$. Udowodnić, że:
- (a) istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $f : G \rightarrow H$ taki, że $f(a) = b$;
 - (b) każdy endomorfizm $\mathbb{Z}$ jest postaci:

$$\psi_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \psi_k(x) = kx;$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

- 6K. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną i $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Definiujemy:

$$kA := \{kx \mid x \in A\}$$

(x dodajemy do siebie k razy). Udowodnić, że kA jest dzielnikiem normalnym A .

7. Czy istnieją poniższe homomorfizmy grup $f : G \rightarrow H$? Jeśli istnieją, to wyznaczyć obraz i jądro danego homomorfizmu.
- (a) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$, $f(1) = 1$.
 - (b) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4)$, $H = (\mathbb{Z}_2, +_2)$, $f(1) = 1$.
 - (c) $G = H = (\mathbb{R}, +)$, $f(1) = 99$.
 - (d) $G = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $H = (\mathbb{R}, +)$, $f(8) = 3$.
 - (e) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $f(1) = 2$.
 - (f) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4)$, $H = (\mathbb{Z}_5, +_5)$, $f(1) = 1$.
8. Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy $f : G \rightarrow H$, gdzie:
- (a) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$;
 - (b) $G = (\mathbb{Z}_3, +_3)$, $H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$;
 - (c) $G = (\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$, $H = (\mathbb{Z}_6, +_6)$;
 - (d) $G = H = (\mathbb{Q}, +)$.
9. Czy następująca podgrupa H grupy G jest dzielnikiem normalnym?
- (a) $G = D_4$, $H = \{\text{id}, O_{\pi/2}, O_{\pi}, O_{3\pi/2}\}$.
 - (b) $G = D_4$, $H = \{\text{id}, O_{\pi}\}$.
 - (c) $G = S_4$, $H = \{\text{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$.
10. Niech

$$H := \{\text{id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \subset S_4.$$

Udowodnić, że:

- (a) H jest podgrupą S_4 ;
- (b) H jest dzielnikiem normalnym w S_4 (wskazówka: dla $\sigma \in S_4$ opisać $\sigma(1, 2)(3, 4)\sigma^{-1}$ i następnie skorzystać z odpowiedniego kryterium na dzielnik normalny z wykładu).