ALGEBRA 1, Lista 4

Ćwiczenia (wtorek) 27.10.2026, Konwersatorium (czwartek) 29.10.2026.

Niech G będzie grupą, $g \in G$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

0S. Materiał teoretyczny: Warstwy lewostronne i warstwy prawostronne podgrupy H grupy G. Własności warstw. Indeks podgrupy H w grupie G. Twierdzenie Lagrange'a oraz wnioski z niego. Małe twierdzenie Fermata. Twierdzenie Wilsona.

1S. Wyznaczyć wszystkie możliwe:
   (a) rzędy elementów $g \in \mathbb{Z}_{20}$;
   (b) rzędy elementów $g \in S_5$;
   (c) rzędy elementów $g \in D_6$.

2S. Załóżmy, że $\operatorname{ord}(g) = 10$. Wyznaczyć $\operatorname{ord}(g^2), \operatorname{ord}(g^5), \operatorname{ord}(g^3)$.

3S. Opisać zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych (przez wypisanie wszystkich jego elementów) G/H i $H\backslash G$, dla:
   (a) $G = S_3,\ H = \{\mathrm{id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$;
   (b) $G = \mathbb{Z},\ H = 5\mathbb{Z}$.

4K. Załóżmy, że $\operatorname{ord}(g) = n$ i niech $r = r_n(k)$.
   (a) Udowodnić, że $g^k = g^r$.
   (b) Udowodnić, że $\operatorname{ord}(g^k) = l$, gdzie l jest najmniejszą liczbą $\geqslant 1$ taką, że $n|kl$.
   (c) Udowodnić, że
   $$\operatorname{ord}\left(g^k\right) = \frac{n}{\mathrm{NWD}(k,n)}.$$
   (d) Udowodnić, że $\operatorname{ord}(g^k) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy k i n są względnie pierwsze.

5K. Wyznaczyć wszystkie możliwe rzędy elementów $g \in D_n$.

6. Niech
   $$\mathbb{Z}_n^* := \{k \in \mathbb{Z}_n \mid \mathrm{NWD}(k,n) = 1\}.$$
   Udowodnić, że:
   (a) mnożenie modulo n (oznaczane $\cdot_n$) jest działaniem na $\mathbb{Z}_n^*$;
   (b) $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ jest grupą (łączność $\cdot_n$ była omówiona na wykładzie).

7. Opisać zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych (przez wypisanie wszystkich jego elementów) G/H i $H\backslash G$, dla:
   (a) $G = \mathbb{Z}_{12},\ H = \{0, 6\}$;
   (b) $G = D_4,\ H = \{\mathrm{id}, O_{\pi/2}, O_{\pi}, O_{3\pi/2}\}$;
   (c) $G = D_4,\ H = \{\mathrm{id}, S\}$, gdzie S jest dowolną symetrią osiową należącą do D_4;
   (d) $G = S_n,\ H = A_n$, gdzie A_n to zbiór permutacji parzystych w S_n (udowodnić, że A_n jest podgrupą S_n!).

8. Obliczyć następujące reszty z dzielenia:
   $$r_{13}\left(125^{342}\right),\ r_{29}\left(321^{485}\right),\ r_{31}\left(321^{485}\right).$$