ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 1

Kategorie

Definicja *Kategoria* $\mathcal{C}$ składa się z:

- Klasy $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, elementy której zwą się *obiektami* $\mathcal{C}$.
- Zbiorów $\mathrm{Hom}(X, Y)$ dla każdych $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, elementy których zwą się *morfizmami* pomiędzy X i Y.
- Funkcji

  $$\circ : \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(Y, Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

  zwanych funkcjami *składania* morfizmów.

takich, że $\forall X, Y, Z, T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$:

1. $(X, Y) \neq (Z, T) \;\Rightarrow\; \mathrm{Hom}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}(Z, T) = \emptyset$.
2. $\exists!\, \mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ taki, że $\forall f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ $\forall g \in \mathrm{Hom}(Z, X)$

   $$f \circ \mathrm{id}_X = f,\ \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

3. $\forall f \in \mathrm{Hom}(X, Y),\ \forall g \in \mathrm{Hom}(Y, Z),\ \forall h \in \mathrm{Hom}(Z, T)$

   $$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Konwencje

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ oznacza się przez $\mathcal{C}$.
- Zamiast $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ pisze się $f : X \to Y$.
- Zamiast $g \circ f$ pisze się gf.
- Zamiast $\mathrm{Hom}(X, Y)$ pisze się $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),\ \mathcal{C}(X, Y),\ [X, Y], [X, Y]_{\mathcal{C}}$.

Przykłady i Oznaczenia

1. **Set**
   Ob(**Set**) to (wszystkie) zbiory, dla $X, Y \in$ **Set**, $\mathrm{Hom}(X,Y) = X^Y$ (funkcje z X do Y).

2. **Top**, **Top**$_*$
   Ob(**Top**) to przestrzenie topologiczne, morfizmy to funkcje ciągłe.
   Ob(**Top**$_*$) to przestrzenie topologiczne z punktem wyróżnionym, morfizmy to funkcje ciągłe zachowujące punkty wyróżnione.

3. **Toph**, **Toph**$_*$
   Ob(**Toph**) = Ob(**Top**), morfizmy to klasy homotopii funkcji ciągłych (Zadanie 1).
   Ob(**Toph**$_*$) = Ob(**Top**$_*$), morfizmy to klasy homotopii funkcji ciągłych zachowujących punkty wyróżnione, homotopie też zachowują punkty wyróżnione.

4. **Diff**
   Ob(**Diff**) to gładkie rozmaitości, morfizmy to funkcje gładkie.

5. **An**
   Ob(**An**) to rozmaitości zespolone, morfizmy to funkcje holomorficzne.

6. **AfVar**$_K$
   Ob(**AfVar**$_K$) to rozmaitości afiniczne nad algebraicznie domkniętym ciałem K (czyli zbiory domknięte Zariskiego w K^n dla różnych n), morfizmy to obcięcia funkcji wymiernych (równoważnie wielomianowych).

7. **Mod**$_R$, gdzie R jest pierścieniem
   Ob(**Mod**$_R$) to (prawe) R-moduły , morfizmy to homomorfizmy R-modułów.
   Mod$_{\mathbb{Z}}$ oznaczamy przez **Ab** (grupy abelowe), **Mod**$_K$ przez **Vect**$_K$ (przestrzenie liniowe nad K) gdy K jest ciałem.

8. **Alg**$_R$, gdzie R jest pierścieniem przemiennym
   Ob(**Alg**$_R$) to R-algebry, morfizmy to homomorfizmy R-algebr.

9. **Grp**
   Ob(**Grp**) to grupy, morfizmy to homomorfizmy grup.

10. Top(X) (gdzie X jest przestrzenią topologiczną)
    Ob(Top(X)) = OPEN(X) – zbiory otwarte w X, morfizmy to inkluzje (Zadanie 2).

11. $\mathrm{Def}(M)$ (gdzie M jest strukturą)
$\mathrm{Ob}(\mathrm{Def}(M))$ = to zbiory definiowalne w M^n (różne n), morfizmy to funkcje definiowalne.

Kolejne definicje

Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami.

- $\mathcal{C}$ jest *mała* gdy $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ jest zbiorem (tylko 6., 10. i 11. są małe).
- $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, *produkt* kategorii $\mathcal{C}, \mathcal{D}$
$\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ i morfizmy to pary morfizmów (Zad. 2).
- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, kategoria *przeciwna* do $\mathcal{C}$
$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \forall\, X, Y \in \mathcal{C}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ (Zad. 2).
- Morfizm $f : X \to Y$ jest *izomorfizmem*, gdy istnieje $g : Y \to X$ taki, że: $gf = \mathrm{id}_X,\ fg = \mathrm{id}_Y$.
- $\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$, *szkielet* kategorii $\mathcal{C}$
$\mathrm{Ob}(\mathrm{Iso}(\mathcal{C}))$ to klasy izomorfizmu obiektów $\mathcal{C}$, morfizmy to też odpowiednie klasy (Zad. 2).
- Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy *szkieletowo małą*, gdy $\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$ jest mała. Kategorie skończonych (lub ograniczonej mocy) przestrzeni topologicznych, rozmaitości różniczkowych itp. nie są małe, ale są szkieletowe małe.
- Kategoria $\mathcal{C}$ jest *podkategorią* kategorii $\mathcal{D}$, gdy $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ jest podklasą $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ i dla każdych $X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$.
- Podkategoria $\mathcal{C}$ jest podkategorią *pełną* kategorii $\mathcal{D}$, gdy dla każdych $X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$.

Przykłady

- **Ab** to pełna podkategoria **Grp**.
- $\mathbf{AfVar}_K$ to podkategoria $\mathrm{Def}(K)$. Nie jest ona pełna.
- **Top** nie jest podkategorią **Set**.
- Niech **Rel** będzie kategorią, taką że $\mathrm{Ob}(\mathbf{Rel}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ i morfizmy to relacje. **Set** jest podkategorią **Rel** i nie jest ona pełna.
- Niech U będzie otwartym podzbiorem przestrzeni topologicznej X. Wtedy $\mathrm{Top}(U)$ jest pełną podkategorią $\mathrm{Top}(X)$.

Definicja obiektów początkowych i końcowych
Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. $X \in \mathcal{C}$ jest *obiektem początkowym* w $\mathcal{C}$, gdy dla każdego $Y \in \mathcal{C}$, $|\operatorname{Hom}(X,Y)| = 1$. Definicja *obiektu końcowego* jest dualna, tzn. obiekt końcowy w $\mathcal{C}$, to obiekt początkowy w $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, tzn. $|\operatorname{Hom}(Y,X)| = 1$.

$\emptyset$ jest obiektem początkowym w **Set**, dowolny zbiór jednopunktowy jest obiektem końcowym w **Set**.

Funktory

Definicja
Funktor (*kowariantny*) F z kategorii $\mathcal{C}$ w kategorię $\mathcal{D}$ (oznaczenie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$) składa się z:

- Przyporządkowania
$$\mathcal{C} \ni X \mapsto F(X) \in \mathcal{D}$$
- Dla każdych $X, Y \in \mathcal{C}$ funkcji
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni f \mapsto F(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$
takich że $F(fg) = F(f)F(g)$ (dla odpowiednich f, g).

Funktor *kontrawariantny* F (oznaczenie $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$), to funktor z kategorii przeciwnej do $\mathcal{C}$ w $\mathcal{D}$, tzn $F(fg) = F(g)F(f)$ (dla odpowiednich f, g).

Przykłady

1. **Cat** to kategoria małych kategorii, morfizmy to funktory (można je składać).

2. Funktory zapominania
$$\mathbf{Alg}_R \to \mathbf{Mod}_R$$
$$\mathbf{An} \to \mathbf{Diff} \to \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$$
$$\mathbf{AfVar}_K \to \mathbf{Top} \quad \text{(Topologia Zariskiego)}$$
$$\mathbf{AfVar}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{Top} \quad \text{(Topologia Euklidesowa)}$$
Mówimy np., że rozmaitość gładka X jest rozmaitością zespoloną, gdy X jest izomorficzna $F(Y)$ dla pewnej rozmaitości zespolonej Y i funktora zapominania $F : \mathbf{An} \to \mathbf{Diff}$.
Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy (nieformalnie na razie) *konkretną*, gdy istnieje funktor zapominania $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.

3. Funktory reprezentowalne.

   Dla każdej kategorii $\mathcal{C}$ mamy funktor
   $$\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}.$$
   Dla każdego $X \in \mathcal{C}$ mamy dwa funktory:
   $$h_X : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}, \quad h_X(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$$
   $$h^X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \quad h^X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$$
   oba funktory na morfizmach działają przez składanie.

   Niech $F : \mathbf{Top} \to \mathbf{Toph}$, $F_* : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Toph}_*$. Wtedy dla każdego n naturalnego mamy
   $$\pi_n : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Set}, \quad \pi_n = h_{S^n} \circ F_*$$
   funktor n-tej grupy podstawowej (S^n jest sferą n-wymiarową). Poźniej się okaże, że $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ i dla $n > 1$, $\pi_n : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Ab}$.

   Dla algebraicznie domkniętego ciała K mamy funktor:
   $$h^K : (\mathbf{AfVar}_K)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_K, \quad h^K(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{AfVar}_K}(V, K)$$
   $h^K(V)$ oznacza się przez $K[V]$ (pierścień funkcji regularnych).

4. Presnopy

   Dla przestrzeni topologicznej X i kategorii $\mathcal{C}$, funktor
   $$F : \mathrm{Top}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$$
   nazywamy *presnopem na X obiektów $\mathcal{C}$.*
   Np. jeśli $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$, to jest to presnop grup abelowych, jeśli $\mathcal{C} = \mathbf{Alg}_K$, to jest to presnop K-algebr. Dla tego typu presnopów do definicji dodaje się warunek $F(\emptyset) = 0$.
   Niech $U \subseteq V$ będzie parą zbiorów otwartych w X i F presnopem. Elementy $F(U)$ zwą się *cięciami* F nad U. Dla $s \in F(V)$ wartość morfizmu $F(V) \to F(U)$ na s oznacza się $s|_U$ i mówi o *obcięciu* s do U.

   Presnop F nazywamy *snopem*, gdy dla każdego $U \in \mathrm{Top}(X)$ i każdego pokrycia $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ wraz z wyborem $s_i \in F(U_i)$ takim, że dla każdych $i, j \in I$, $s_i|U_{ij} = s_j|U_{ij}$, istnieje jedyny $s \in F(U)$ taki, że dla wszystkich $i \in I$, $s|U_i = s_i$,
   Przykłady snopów

(a) Dla $X \in \mathbf{An}$ mamy $\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}$, snop ($\mathbb{C}$-algebr) funkcji holomorficznych (w $\mathbb{C}$).

(b) Dla $X \in \mathbf{Diff}$ mamy C_X^{∞}, snop ($\mathbb{R}$-algebr) funkcji gładkich (w $\mathbb{R}$)

(c) Dla $X \in \mathbf{Top}$ mamy C_X, snop ($\mathbb{R}$-algebr) funkcji ciągłych (w $\mathbb{R}$)

(d) Dla $X \in \mathbf{AnfVar}_K$ mamy $\mathcal{O}_X$, snop (K-algebr) strukturalny: dla $U \subseteq X$ otwartego w U, $\mathcal{O}_X(U)$ to zbiór funkcji wymiernych w K wszędzie określonych na U.

(e) Dla $X \in \mathbf{Top}$ i $A \in \mathbf{Ab}$ mamy A_X, snop stały: Dla każdego zbioru otwartego U, $A_X(U) = A$ i funkcje obcięcia są stałe.

(f) Dla struktuktury M mamy S, presnop (przestrzeni topologicznych) typów zupełnych na M (M z topologią dyskretną).
Dla $A \subseteq M$, $S(A)$ to typy zupełne nad A; funkcje obcięcia, to obcięcia typów do mniejszych zbiorów parametrów.

Definicje
Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będzie funktorem.

- F jest *wierny*, gdy jest "1-1" na zbiorach morfizmów.
- F jest *pełny*, gdy jest "na" na zbiorach morfizmów.
- F jest *wiernie pełny*, gdy jest wierny i pełny.
- Kategoria *konkretna* to para $(\mathcal{C}, F)$, gdzie F jest wiernym funktorem w **Set**.

Przykłady

1. Funktor włożenia podkategorii jest funktorem wiernym. Funktor włożenia pełnej podkategorii jest funktorem wiernie pełnym.
2. Funktor $F : \mathbf{Top} \to \mathbf{Toph}$ nie jest wierny, ale jest pełny.
3. Funktor $h^K : (\mathbf{AfVar}_K)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_K$ pierścienia funkcji regularnych jest wiernie pełny.
4. Funktory zapominania $\mathbf{An} \to \mathbf{Diff} \to \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ (i inne) są wierne ale nie są pełne.