ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 10

Kohomologie grup

Jeśli R jest pierścieniem przemiennym z 1 i G grupą, to RG (pierścień grupowy) jako grupa addytywna jest izomorficzna z R-modułem wolnym, którego bazą jest G a mnożenie w RG rozszerza mnożenie grupowe.
RG jest przemienny wtedy i tylko wtedy, gdy G jest przemienna.
A jest *G-modułem*, gdy jest lewym $\mathbb{Z}G$-modułem, czyli A jest grupą abelową, na której G działa z lewej poprzez automorfizmy.
Kategoria lewych modułów nad dowolnym pierścieniem jest kategorią abelową.
Dla A, B – G-modułów, $\mathrm{Hom}_G(A, B)$ oznacza zbiór homomorfizmów pomiędzy A i B traktowanych jako lewe $\mathbb{Z}G$-moduły. Podobnie indeks G pojawia się w innych kontekstach.
Jeśli $\mathbb{Z}$ potraktujemy jako trywialny G-moduł i A jest dowolnym G-modułem to definiujemy

$$H_n(G, A) := \mathrm{Tor}_n^G(\mathbb{Z}, A) = L_n(\cdot \otimes_{\mathbb{Z}G} A)(\mathbb{Z})$$

$$H^n(G, A) := \mathrm{Ext}_G^n(\mathbb{Z}, A) = R_n(h^A)(\mathbb{Z}).$$

Zobaczmy najpierw czym są zerowe (ko)homologie.

$$H_0(G, A) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong A/\{a - ga | a \in A, g \in G\} =: A_G,$$

$$H^0(G, A) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) \cong \{a \in A | (\forall g \in G) ga = a\} =: A^G.$$

A^G to niezmienniki A względem G, A_G to koniezmienniki.
Aby policzyć wyższe (ko)homologie grupy G, potrzebujemy projektywnej G-rezolwenty $\mathbb{Z}$.

Uwaga
Gdy A jest wolną grupą abelową o bazie X, jeśli G działa w sposób wolny na X (tzn. dla dowolnego $g \in G$, jeśli istnieje $x \in X$ taki, że $gx = x$, to $g = 1$), to A staje się wolnym G-modułem.

Przykłady wolnych G-rezolwent $\mathbb{Z}$

1. Przykład topologiczny (szkic)
   Najpierw przypomnę definicje homologii singularnych przestrzeni topologicznej.

Niech Δ_n będzie standardowym sympleksem n-wymiarowym w $\mathbb{R}^{n+1}$ (tzn. $\Delta_n = \{(x_0, \dots x_n) | 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \ \sum x_i = 1\}$ – uwypuklenie bazy standardowej w $\mathbb{R}^{n+1}$) i X będzie przestrzenią topologiczną. Definiujemy $C_n(X)$, *n-tą grupę łańcuchów singularnych* jako wolną grupę abelową o bazie $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X)$.
Dla każdego n i $i = 0, \dots n$ mamy funkcje ciągłą zanurzenia na i-tą ścianę

$$\sigma_{i,n} : \Delta_{n-1} \to \Delta_n, \quad \sigma_{i,n}(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n).$$

Definiujemy różniczkę

$$\delta_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \quad \delta_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f(\sigma_{i,n}(x)).$$

Wtedy $C_*(X)$ jest kompleksem łańcuchów i dla grupy abelowej A,

$$H_n(X, A) := H_n(C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A), \quad H^n(X, A) := H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X), A)).$$

Jeśli X jest ściągalna (tzn. $X \cong *$ w **Toph**), to dla każdego n,

$$H_n(X) \cong H_n(*), \quad \text{czyli} \ \ H_0(X) = \mathbb{Z}, \ H_{>0}(X) = 0.$$

Stąd dla X ściągalnego mamy wolną rezolwentę grupy abelowej $\mathbb{Z}$

$$\dots \xrightarrow{\delta_2} C_1(X) \xrightarrow{\delta_1} C_0(X) \xrightarrow{\delta_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

gdzie δ_0 jest homomorfizmem w $\mathrm{coker}(\delta_1) = H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Załóżmy teraz, że X jest ściągalna i G działa w sposób wolny na X (poprzez homeomorfizmy). Wtedy G działa w sposób wolny na $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X)$ i $C_n(X)$ staje się wolnym G-modułem.
Również δ_n jest G-homomorfizmem, czyli $C_*(X) \to \mathbb{Z}$ staje się wolną G-rezolwentą $\mathbb{Z}$.

Niech $X = K(G, 1)$ będzie przestrzenią Eilenberga – Mac Lane'a, tzn.

$$\pi_1(X) = G, \quad \pi_{>1}(X) = 0,$$

i $\tilde{X}$ jest uniwersalną przestrzenią nakrywającą X (tzn. $\tilde{X}$ jest jednospójna (w tym przypadku ściągalna) i mamy nakrycie $\pi : \tilde{X} \to X$).
Wtedy G działa w sposób wolny na $\tilde{X}$ i $\tilde{X}/G$ jest homeomorficzna z X. Stąd dla dowolnego trywialnego G-modułu A mamy

$$C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong C_n(X) \otimes A, \quad \mathrm{Hom}_G(C_n(\tilde{X}), A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(X), A).$$

Dostajemy

$$H_n(G,A) \cong H_n(K(G,1),A), \quad H^n(G,A) \cong H^n(K(G,1),A).$$

2. Rezolwenta standardowa (bar-rezolwenta)
Definiujemy F_n jako wolny $\mathbb{Z}$-moduł którego bazą jest G^{n+1} i G działa na (bazie) F_n po współrzędnych

$$g(g_0,\ldots,g_n) = (gg_0,\ldots,gg_n).$$

Wtedy F_n jest wolnym G-modułem o bazie

$$\{(1,g_1,\ldots,g_n)|(g_1\ldots,g_n) \in G^n\}.$$

Dla $i = 0,\ldots,n$ definiujemy $\pi_{i,n} : F_n \to F_{n-1}$, tak że na $\mathbb{Z}$-bazie $\pi_{i,n}$ jest określone jako rzutowanie na wszystkie osie poza i-tą. Wtedy $\pi_{i,n}$ jest G-homomorfizmem i poprzez funkcje

$$\delta_n : F_n \to F_{n-1}, \quad \delta_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \pi_{i,n}$$

dostajemy kompleks łańcuchów, który jest wolną G-rezolwentą $\mathbb{Z}$ (ćwiczenie) zwaną *rezolwentą standardową*.

Utożsamimy teraz G-bazę F_n z G^n w inny sposób

$$G^n \ni (g_1,\ldots,g_n) \mapsto (1,g_1,g_1g_2,\ldots,g_1g_2\ldots g_n) =: [g_1|g_2|\ldots|g_n] \in F_n.$$

Dostajemy wzór na δ_n

$$\delta_n[g_1|\ldots|g_n] = g_1[g_2|\ldots|g_n]+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1|\ldots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\ldots|g_n]+(-1)^n[g_1|\ldots|g_{n-1}].$$

Niech teraz A będzie dowolnym G-modułem i

$$C^n(G,A) := \mathrm{Hom}_G(F_n,A).$$

Wtedy $H^n(G,A) = H^n(C^*(G,A)))$.
Ponieważ F_n jest wolnym G-modułem o bazie G^n mamy izomorfizm grup abelowych

$$\mathrm{Hom}_G(F_n,A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(G^n,A), \quad F \mapsto f := F|_{G^n}.$$

Zinterpretujemy teraz różniczkę $\delta^n : C^{n-1}(G,A) \to C^n(G,A)$

$$\delta^n(f)(g_1,\dots,g_n) = F(\delta_n[g_1|\dots|g_n]) =$$

$$= F(g_1[g_2|\dots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1|\dots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\dots|g_n] + (-1)^n[g_1|\dots|g_{n-1}]) =$$

$$g_1F([g_2|\dots|g_n]) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^iF([g_1|\dots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\dots|g_n]) + (-1)^nF([g_1|\dots|g_{n-1}])$$

$$= g_1f(g_2,\dots,g_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^if(g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\dots,g_n) + (-1)^nf(g_1,\dots,g_{n-1}).$$

Napiszemy otrzymaną równość jawnie dla $n = 1,2,3$.

$$\delta_1 : C^0(G,A) \to C^1(G,A), \quad \delta_1(a)(g) = gf_a(1) - f_a(1) = ga - a.$$

$$\delta_2 : C^1(G,A) \to C^2(G,A), \quad \delta_2(f)(g,h) = gf(h) - f(gh) + f(h).$$

$$\delta_3 : C^2(G,A) \to C^3(G,A), \quad \delta_3(f)(g,h,k) = gf(h,k) - f(gh,k) + f(g,hk) - f(h,k).$$

Niech

$$B^n(G,A) = \mathrm{im}(\delta^n) \text{ – } n\text{-brzegi}, \quad Z^n(G,A) = \ker(\delta^{n+1}) \text{ – } n\text{-cykle}$$

Czyli $H^n(G,A) = Z^n(G,A)/B^n(G,A)$.
Z powyzszego opisu dostajemy

$$C^1(G,A) = \{f : G \to A | (\forall g,h \in G) f(gh) = gf(h) + f(h)\}.$$

Funkcje j.w. nazywają się *różniczkowaniami* (jeśli A rozumiemy też jako trywialny prawy $\mathbb{Z}G$-moduł, to dostajemy regułę Leibniza) lub *skośnymi homomorfizmami.*

$$C^2(G,A) = \{f : G^2 \to A | (\forall g,h,k \in G) gf(h,k) - f(gh,k) + f(g,hk) - f(h,k) = 0\}.$$

3. Rezolwenta skończonej grupy cyklicznej.
Niech t oznacza generator $G = \mathbb{Z}$.
Mamy $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$.
Niech $N := 1 + t + \dots + t^{n-1} \in \mathbb{Z}G$.
Wtedy dostajemy wolną rezolwentę (ćwiczenie).

$$\dots \xrightarrow{\cdot(t-1)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\cdot(t-1)} \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0\ .$$

Zinterpretujemy teraz kohomologie grup wymiarów 1 i 2.

Rozszerzenie grupy A przez grupę G (lub, np. Brown "Kohomologie grup", G przez A) to diagram

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1\ ,$$

gdzie i jest "1-1", $\mathrm{im}(i) = \ker(j)$, j jest "na".
Równoważność rozszerzeń grup definiujemy jak dla rozszerzeń R-modułów.
Jeśli A jest abelowa, to E działa na A poprzez sprzężenia. A działa na sobie trywialnie, czyli dostajemy działanie G na A i A staje się G-modułem.
Jeśli A jest G-modułem, to definiujemy *produkt półprosty* $A \rtimes G$ jako zbiór $A \times G$ z działaniem

$$(a, g)(b, h) = (a + gb, gh).$$

Dostajemy rozszerzenie A przez G i struktura G-modułu na A otrzymana poprzez to rozszerzenie pokrywa się z wyjściową:

$$(a, g)(b, 1)(a, g)^{-1} = (a+gb, g)(-g^{-1}a, g^{-1}) = (a+gb+g(-g^{-1}a), 1) = (gb, 1).$$

Twierdzenie
Ustalmy rozszerzenie

$$(*)\quad 1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1\ ,$$

Następujące warunki są równoważne.

1. Istnieje homomorfizm $s : G \to E$ taki, że $\pi s = \mathrm{id}_G$.
2. Isnieje $\tilde{G} < G$, taka że $\pi|_{\tilde{G}} : \tilde{G} \cong G$, $E = i(A)G$ i $i(A) \cap \tilde{G} = 1$.
3. Rozszerzenie $(*)$ jest równoważne rozszerzeniu produktu półprostego względem działanie G na A pochodzącego z rozszerzenia $(*)$.

Przyjrzyjmy się teraz możliwym rozszczepieniom $s : G \to A \rtimes G$.
Funkcja s musi mieć postać $s(g) = (d(g), g)$ dla pewnego $d : G \to A$.
Dla $g, h \in G$ mamy

$$(d(gh), gh) = s(gh) = s(g)s(h) = (d(g), g)(d(h), h) = (d(g) + gd(h), gh),$$

stąd $d(gh) = d(g) + gd(h)$, czyli d jest różniczkowaniem i $d \in Z^1(G, A)$.
Rozszczepienia $s_1, s_2 : G \to E$ są A-*równoważne*, gdy istnieje $a \in A$ taki, że dla każdego $g \in G$, $s_1(g) = i(a)s_2(g)i(a)^{-1}$. Łatwo udowodnić (ćwiczenie):

Twierdzenie
$H^1(G,A)$ odpowiada klasom A-równoważnych rozszczepień rozszerzenia

$$1 \to A \to A \rtimes G \to 1.$$

Weźmy teraz dowolną funkcję $s : G \to E$ taką, że $\pi s = \mathrm{id}_G$ i $s(1) = 1$. Jeśli s jest homomorfizmem, to rozszerzenie się rozszczepia. Jeśli nie, to s wciąż zadaje bijekcję $A \times G$ z E: $(a,g) \mapsto i(a)s(g)$.

Najpierw znajdziemy funkcję, która "mierzy odległość" s od homomorfizmu. Dla dowolnych $g,h \in G$, mamy $\pi(s(g)s(h)) = \pi(s(gh))$, czyli mamy funkcję

$$f : G^2 \to A, \quad s(g)s(h) = i(f(g,h))s(gh).$$

Teraz znajdziemy wzór na działanie grupowe z E na $A \times G$.

$$(a,g)(b,h) \mapsto i(a)s(g)i(b)s(h) = i(a)(s(g)i(b)s(g)^{-1})s(g)s(h) = i(a)i(gb)s(g)s(h)$$

$$= i(a+gb)i(f(g,h))s(gh) = i(a+gb+f(g,h))s(gh) \mapsto (a+gb+f(g,h),gh).$$

Czyli dostajemy wzór

$$(a,g)(b,h) = (a+gb+f(g,h),gh).$$

Łączność działania tak zdefiniowanego jest równoważna temu, że $f \in C^2(G,A)$ i dość łatwo można pokazać:

Twierdzenie
Klasy równoważnych rozszerzeń A przez G z zadanym działaniem G na A są w bijekcji z $H^2(G,A)$.