ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 7

Definicja

Morfizm $f : X \to Y$ jest *monomorfizmem*, gdy dla każdych $g, h : Z \to X$, $fg = fh$ implikuje $g = h$. f jest *epimorfizmem*, gdy dla każdych $g, h : Y \to Z$, $gf = hf$ implikuje $g = h$.
Monomorfizm oznaczamy przez $X \hookrightarrow Y$ a epimorfizm przez $X \twoheadrightarrow Y$.
$\mathrm{coker}(X \hookrightarrow Y)$ możemy rozumieć jako obiekt ilorazowy Y/X.

Przykłady

1. Dowolny izomorfizm jest monomorfizmem i epimorfizmem, ale nie na odwrót.

2. Monomorfizmy w **Set** to funkcje "1-1". Epimorfizmy w **Set**, to funkcje "na". Podobnie w **Top**.

3. Monomorfizmy w **Haus** (topologiczne przestrzenie Hausdorffa) to funkcje ciągłe "1-1". Epimorfizmy w **Set**, to *funkcje dominujące*, tzn. funkcje ciągłe $f : X \to Y$ takie, że $F(X)$ jest gęste w Y. Podobnie w $\mathbf{Var}_K$.

Fakt

Niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią abelową i $f : X \to Y$ morfizmem. Wtedy:

1. f jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(f) = 0$.

2. f jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{coker}(f) = 0$.

3. f jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(f) = \mathrm{coker}(f) = 0$.

W szczególności f jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy f jest epimorfizmem i monomorfizmem.

Dowód

1. $\Rightarrow$ Nieck $k : K \to X$ będzie jądrem f. Wtedy $fk = 0$. Ale też $f0 = 0$, czyli $k = 0$, bo f jest monomorfizmem. Z własności uniwersalnej jądra, $\mathrm{id}_K = 0$, stąd (ćwiczenia) $K = 0$.
   $\Leftarrow$ Załóżmy, że $fg = fh$. Wtedy $f(g - h) = 0$. Stąd $g - h$ faktoryzuje się prze jądro, czyli $g - h = 0$, bo $\ker(f) = 0$.

2. Podobnie jak dla monomorfizmów.

3. $\Rightarrow$ Wynika z 1. i 2.
   $\Leftarrow$ Rozłóżmy f jak we własności A4

$$0 \xrightarrow{0} X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{0} 0,$$

   Ale $\mathrm{coker}(0 \to X) = \mathrm{id}_X$ i $\ker(Y \to 0) = \mathrm{id}_Y$. Stąd $I = X$, $J = Y$ i $f = j$ – izomorfizm. $\square$

Fakt
W kategorii abelowej jądro jest monomorfizmem i kojądro epimorfizmem. W szczególności, w rozkładzie $f : X \to Y$ na $f = ij$, $j : X \to I = \mathrm{im}(f)$ jest epimorfizmem i $i : I \to Y$ jest monomorfizmem.
Dowód (dla jądra)
Jeśli $k : \ker(f) \to X$ jest jądrem $f : X \to Y$, to dla dowolnego $g : F \to \ker(f)$ takiego, że $kg = 0$, $fkg = 0$, czyli fkg faktoryzuje się przez jedyny morfizm $F \to \ker(f)$. Stąd $0 = h$ i $0 = \ker(k)$, czyli k jest monomorfizmem. Podobnie dla epimorfizmu. $\square$

Theorem
Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolną kategorią, $A \in \mathcal{C}$. Wtedy funktor reprezentowalny h_A zachowuje granice odwrotne.
Przechodząc do kategorii dualnej, h^A przenosi granice proste na odwrotne.
Jeśli $\mathcal{C}$ jest abelowa, to h_A zachowuje granice jako funktor w **Ab**.
Dowód
Niech

$$(X, f_i) = \varprojlim (X_i, f_{jk}).$$

Chcemy pokazać, że

$$(\mathrm{Hom}(A, X), h_A(f_i)) = \varprojlim (\mathrm{Hom}(A, X_i), h_A(f_{jk})).$$

Weźmy dowolnego "kandydata" (Y, g_i), gdzie $g_i : Y \to \mathrm{Hom}(A, X_i)$ są odpowiednio przemienne z $h_A(f_{jk})$.
Dla dowolnego $y \in Y$, mamy

$$f_{jk} \circ g_j(y) = h_A(f_{jk})(g_j(y)) = g_k(y).$$

Stąd $(A, g_i(y))$ jest "kandydatem" na $\varprojlim (X_i, f_{jk})$, czyli istnieje **jedyna** funkcja $g(y) : A \to X$ odpowiednio przemienna z $g_i(y)$. Stąd $g : Y \to \mathrm{Hom}(A, X)$ jest jedyną funkcją odpowiednio przemienną z $h_A(g_i)$.
Dla kategorii abelowych, jeśli g_i są homomorfizmami, to dla każdych $y, y' \in Y$, $g(y) + g(y')$ i $g(y + y')$ są jedyne, czyli są sobie równe i g jest homomorfizmem. $\square$

Przykład
Funktor n-tej grupy podstawowej zachowuje produkty.

Definicja (kompleksu i kohomologii)

1. *Kompleks* (kołańcuchów), w abelowej kategorii $\mathcal{A}$, to dowolny nieskończony ciąg obiektów i morfizmów (zwanych różniczkami)

$$X^* : \quad \dots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

taki, że dla każdego n, $d^{n+1}d^n = 0$.
Warunek $d^{n+1}d^n = 0$ w kategorii $\mathbf{Mod}_R$ znaczy, że $\mathrm{im}(d^n) \subseteq \ker(d^{n+1})$. Podobnie możemy rozumieć ten warunek w dowolnej kategorii abelowej: $d^{n+1}d^n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy d_n faktoryzuje się przez $\alpha_n : X^n \to \ker(d^{n+1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X^n \to \mathrm{im}(d^n)$ faktoryzuje się przez monomorfizm $\mathrm{im}(d^n) \to \ker(d^{n+1})$.

2. Dla kompleksu X^* definiujemy $H^n(X^*)$ (n-te *kohomologie* X^*) jako $\mathrm{coker}(\alpha_{n-1})$. Równoważnie

$$H^n(X^*) = \mathrm{coker}(\mathrm{im}(d^{n-1}) \hookrightarrow \ker(d^n)),$$

czyli $H^n(X^*)$ możemy rozumieć jako $\frac{\ker(d^n)}{\mathrm{im}(d^{n-1})}$.
Równoważnie (ćwiczenia) $H^n(X^*) = \ker(\beta_n)$, gdzie β_n jest faktoryzacją d^n przez $\mathrm{coker}(d^{n-1})$ (istnienie takiej faktoryzacji jest równoważne warunkowi $d^n d^{n-1} = 0$).

3. Kompleks X^* nazywamy *acyklicznym* w obiekcie X^n, gdy $H^n(X^*) = 0$. Kompleks acykliczny w każdym obiekcie nazywamy *ciągiem dokładnym.* Ciąg dokładny postaci

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

nazywamy *krótkim ciągiem dokładnym* (rozumiany jaki kompleks poprzez uzupełnienie obiektami zerowymi).
Przykład
Dla sumy prostej $A \oplus B$,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1} A \oplus B \xrightarrow{b_2} B \longrightarrow 0,$$

jest krótkim ciągiem dokładnym.

4. Dostajemy kategorię kompleksów kołańcuchów $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$.
   Morfizmy, to morfizmy odpowiadających sobie obiektów zachowujące różniczkowania d^n.
   Jądro, kojądro, sumę prostą definiuje się "obiekt po obiekcie" i $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ jest abelowa.
   Mówimy, że krótki ciąg dokładny się *rozszczepia*, gdy jest izomorficzny z krótkim ciągiem dokładnym pochodzącym od sumy prostej.

Definicja
Ustalmy funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pomiędzy kategoriami abelowymi.

1. F jest *addytywny*, gdy indukuje homomorfizmy na grupach morfizmów. Funktor addytywny przenosi kompleksy na kompleksy.

2. Funktor addytywny nazywamy *dokładnym*, gdy przenosi ciągi dokładne na ciągi dokładne.

3. F (addytywny) nazywamy *prawodokładnym*, gdy przenosi ciąg dokładny $0 \to A \to B \to C \to 0$, na ciąg $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$, który jest acykliczny w $F(B)$ i $F(C)$.

4. F nazywamy *lewodokładnym*, gdy przenosi ciąg dokładny $0 \to A \to B \to C \to 0$, na $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$, który jest acykliczny w $F(B)$ i $F(C)$.

Fakt

$$\text{Ciąg} \quad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \quad \text{jest}$$

1. acykliczny w X i Y wtedy i tylko wtedy, gdy $f = \ker(g)$.

2. acykliczny w Y i Z wtedy i tylko wtedy, gdy $g = \mathrm{coker}(f)$.

Dowód

1. Ciąg jest acykliczny w X wtedy i tylko wtedy, gdy

   $$\mathrm{coker}(0 \to \ker(f)) = 0.$$

   Ale

   $$\mathrm{coker}(0 \to \ker(f)) = \mathrm{id}_{\ker(f)},$$

   stąd acykliczność w X jest równoważna $\ker(f) = 0$.
   Ciąg jest acykliczny w Y wtedy i tylko wtedy, gdy

   $$\mathrm{coker}(X \to \ker(g)) = 0.$$

Wiemy, że acykliczność w X jest równoważna temu, że $\ker(f) = 0$, co z kolei jest równoważne $\ker(X \to \ker(g)) = 0$. Czyli $X \to \ker(g)$ jest izomorfizmem stąd $f = \ker(g)$ (jądro jest określone z dokładnością do izomorfizmu!).

2. Tak samo jak dla 1., używając definicji $H^n(X^*)$ jako $\ker(\beta_n)$. □

Fakt
Niech $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ będzie funktorem pomiędzy kategoriami abelowymi. Oto niektóre z własności, które może mieć F.

1. F jest prawo-dołączony (odp. lewo-dołączony).
2. F zachowuje granice odwrotne (odp. granice proste).
3. F zachowuje jądra (odp. kojądra).
4. F jest lewodokładny (odp. prawodokładny).
5. F zachowuje monomorfizmy (odp. epimorfizmy).

Wtedy 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 5..
Dowód oczywisty (3. $\Rightarrow$ 4. wynika z poprzedniego faktu). □

Motywująca uwaga
Interesuje nas znajdowanie wartości funktorów na F na obiektach, $F(X)$. Jeśli F jest dokładny i umiemy wpisać X w ciąg dokładny

$$0 \to A \to X \to B \to 0$$

dla prostszych obiektów A, B, to znajomość $F(A)$ i $F(B)$ coś nam mówi o $F(C)$.
Jeśli F nie jest dokładny, to dzięki algebrze homologicznej zmierzymy "jak daleko" znajduje się $F(X)$ od $F(A)$ i $F(B)$.