Lista 6. Funkcje

Definicja 0.1 *Mając dane wzory X, Y funkcją nazywamy zbiór par $(x, y) \in X \times Y$ takich, że:*

1. *Dla każdego $x \in X$ istnieje wśród tych par para (x, y) oraz*
2. *Nie istnieją dwie pary $(x, y_1), (x, y_2)$ dla $y_1 \neq y_2$.*

Formalnie istnienie pary (x, y) oznacza z definicji $f(x) = y$.

Uwagi:

1. Jeśli ktoś napisze nam funkcje, to zawsze trzeba najpierw stwierdzić, że nie są złamane warunki 1 lub 2, czy $x-$y są ze zbioru X, a $y-$ki ze zbiory Y.
2. Nazwy:
   - X - dziedzina,
   - Y - przeciwdziedzina,
   - x - argument,
   - y - wartość,
   - $f(x) = ...$ - wzór funkcji.
3. Definicja 0.1 jest zgodna z definicją: dla każdego x (warunek 1) istnieje dokładnie jeden (warunek 2) y taki, że $f(x) = y$.
4. Nie wszystkie $y \in Y$ muszą występować w parach (x, y).
5. Niektóre y mogą występować w parze z różnymi $x-$ami.
6. Dwie funkcje zadane przez ten sam wzór $f(x) = ...$ mogą być różne, jeśli są różne np. ich dziedziny.
7. Zawsze można zmienić przeciwdziedzinę tak, aby funkcja była "na" (patrz definicja poniżej). Wystarczy zamiast Y wpisać zbiór tych y, które pojawiają się w parach (x, y) (tzw. zbiór wartości).

Definicja 0.2 *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy różnowartościową, jeśli nie istnieją dwa argumenty, dla których wartości są równe. Można powiedzieć to jeszcze na dwa sposoby:*

1. *Jeśli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = x_2$.*

Definicja 0.3 *Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest "na", jeśli wszystkie y za przeciwdziedziny Y jest wartością dla pewnego x (tzn. mamy parę (x, y) lub równoważnie $f(x) = y$). Formalnie*

$$\forall y \in Y \, \exists x \in X \qquad f(x) = y.$$

1. Które z następujących funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są różnowartościowe?

(a) $f(x) = 0$,

(b) $f(x) = 2x$,

(c) $f(x) = x + 5$,

(d) $f(x) = x^4 + 1$,

(e) $f(x) = |x| - 1$,

(f) $f(x) = x^3 + 7$,

(g) $f(x) = x^2 - 6x$,

(h) $f(x) = 2^x - 1$,

(i) $f(x) = \sin x$,

(j) $f(x) = x^4 + 1$,

(k) $f(x) = x^3 - x^2$,

2. Które z funkcji z poprzedniego zadania są "na"?

1. Niech funkcja $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ będzie zadana wzorem $f(x) = x^2$. Udowodnij, że jest ona różnowartościowa i "na".

2. Pokaż, że funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x, y) = x$ jest "na", ale nie jest różnowartościowa.

3. Czy podane niżej funkcje są różnowartościowe i czy są "na"?

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k - 4$,

   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k^3 + 2$,

   (c) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n, k) = n + k$,

   (d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n, k) = nk - 5$,

   (e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(k) = k + 6$,

   (f) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(k, n) = k^2 - 4n$,

   (g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k - 4$,

   (h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2^n$,

   (i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(k) = (k - 4, 2k)$,

   (j) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n, k) = n^2 + k^2$,

   (k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, x^2)$,

   (l) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - y, x + y)$.

4. Niech X będzie zbiorem okręgów na płaszczyźnie. Zadajemy funkcję $f : X \to (0, \infty)$ następująco: jeśli okrąg $o \in X$ ma promień r, to $f(o) = r$. Czy taka funkcja jest poprawnie zdefiniowana? Czy jest ona różnowartościowa lub "na"?

Marcin Preisner
preisner@math.uni.wroc.pl