

DODATKOWA LISTA ZADAŃ DO TRENINGU PRZED EGZAMINEM

1. Udowodnij, że

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

2. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej
- n
- zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}.$$

3. Przy odpowiednich założeniach na
- n, k
- (takich, że wszystkie symbole istnieją), udowodnij wzory:

(a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1},$$

(b)

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

(c)

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

4. Dowiedz, że liczba
- $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$
- jest niewymierna.

5. Dowiedz, że nie istnieje liczba wymierna
- q
- spełniająca równość

$$q^q = 5.$$

6. Liczby
- $a + b$
- ,
- $b + c$
- i
- $c + a$
- są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby
- a
- ,
- b
- ,
- c
- są wymierne?

7. Znajdź kresy zbioru

$$\left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

8. Oblicz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)

$$\frac{\sqrt{3^n + n^2}}{\sqrt{3^n + 2^n + 1}}$$

(b)

$$\frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2} + \frac{n^2 + 3}{n^3 + 3} + \dots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n}$$

(c)

$$\frac{n!}{n^{22}}$$

9. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^3 + k}{n^4 + (-1)^k \cdot k^2}.$$

10. Z definicji oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{3n^2 + n + 1}.$$

11. Pokaż, że następujący ciąg jest zbieżny

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)^3}\right).$$

12. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

13. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}.$$

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

14. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność następujących szeregów:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

15. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3nx) \arctan n}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny?

16. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ x + 3 & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła?

17. Załóżmy, że dla każdego $x \neq 0$ funkcja $f(x)$ ma własność $f(x/\sqrt{n}) \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$. Czy funkcja f ma granicę zero w punkcie zero?

18. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}.$$

19. Znajdź funkcję odwrotną do $\operatorname{arcsinh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

20. Skonstruuj funkcję nieciągłą we wszystkich punktach postaci $n + 1/n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

21. Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ , aby

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(a) $f(x) = 1/x, x_0 = 4, \varepsilon = 1/100$

(b) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 30, \varepsilon = 1/10$

22. Czy warunek

$$\forall \delta \in (0, 1) \exists \kappa > 0 \forall x, y \in D \quad (|x - y| < \kappa^2 \implies f(x) - f(y) < -(\ln \delta)^{-1})$$

jest równoważny jednostajnej ciągłości funkcji f na zbiorze D ?

23. Czy funkcja e^x jest jednostajnie ciągła na przedziałach $(-\infty, 0]$, $[-1, 1]$, $[0, \infty)$. Uzasadnij odpowiedzi.

24. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^{-1/2}$ nie jest jednostajnie ciągła na $(0, 1]$.

25. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000} + 2 = (1, 000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

26. Dowieść, że równanie

$$x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos(x^3)$$

ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

27. Pokaż, że funkcja $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ jest odwracalna na całej prostej. Znajdź funkcje pochodne funkcji tgh i jej odwrotnej.

28. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \log_4(2^x + 8^x)$$

29. Oblicz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$$

30. Wyznacz przedział zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 50^n x^{2n+5}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{2^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2 + n} - n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n + 1)^n x^{3n}}{(81n + 2)^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{(n!)^3}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} x^{n^3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7} x^{6n}}{\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} x^n}{n^2}$

31. Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} x^n$

32. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

33. Niech $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$. Oblicz z definicji $f'(3)$.

34. Oblicz granice:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - x^2 - 2}{x \sin x - x^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}$

35. Czy funkcja $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ($x > 0$), $f(0) = 0$ jest różniczkowalna? Czy jest klasy C^1 (pochodna ciągła)?
36. Rozwiń w szereg Taylora w punkcie $x = 0$ funkcje

$$f(x) = \frac{x^3 \cos(x^2) \ln(1+x^4) + 2 \cos x - 2}{x^2} \quad (f(0) = 0)$$

37. Oszacuj błąd przybliżenia

$$e^x \simeq 1 + x + x^2/2 + \dots + x^n/(n!) \quad (x \in [0, 1])$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x \in [0, 1])$$

38. Znajdź wymiary prostokąta bez jednego boku, który ma długość trzech boków równą 60 cm oraz największą możliwą powierzchnię (po domknięciu).
39. Rysujemy prostokąt pod wykresem sinusoidy na odcinku $[0, \pi]$ i nad osią Ox . Znajdź największe możliwe pole takiego prostokąta.
40. Zbadaj zbieżność jednostajną szeregów funkcyjnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{nx^4}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2|x|}$$

41. Czy funkcja ciągła na \mathbb{R} , która ma granice w $\pm\infty$ jest jednostajnie ciągła?
42. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \left(\frac{e}{2n}\right)^n$$