Wrocław, 28 stycznia 2021

MATEMATYKA UNIWERSYTECKA W LO - SKRYPT

MARCIN PREISNER [MARCIN.PREISNER@UWR.EDU.PL]

Spis treści

1. INDUKCJA MATEMATYCZNA 2
1.1. Wprowadzenie 2
1.2. Lista zadań 5
2. SYMBOL NEWTONA 11
2.1. Wprowadzenie 11
2.2. Lista zadań 14
3. LICZBY WYMIERNE I NIEWYMIERNE 17
3.1. Wprowadzenie 17
3.2. Lista zadań 19
4. PODZIELNOŚĆ LICZB CAŁKOWITYCH 22
4.1. Wprowadzenie 22
4.2. Lista zadań 24
5. PODZIELNOŚĆ LICZB CAŁKOWITYCH, CIĄG DALSZY 27
5.1. Wprowadzenie 27
5.2. Lista zadań 29
6. ZASADA SZUFLADKOWA 32
6.1. Lista zadań 32
7. NIERÓWNOŚCI 35
7.1. Wprowadzenie 35
7.2. Lista zadań 36
8. WIĘCEJ NIERÓWNOŚCI 40
8.1. Wprowadzenie 40
8.2. Lista zadań 41
9. LICZNOŚĆ ZBIORU I NIESKOŃCZONOŚCI 44
9.1. Wprowadzenie 44
9.2. Lista zadań 45
10. LICZBY ZESPOLONE 47
10.1. Wprowadzenie 47
10.2. Lista zadań 48
11. CIĄGI LICZBOWE 53
11.1. Wprowadzenie 53
11.2. Lista zadań 56
12. CIĄGI ZADANE REKURENCJAMI 61
12.1. Wprowadzenie 61
12.2. Lista zadań 63
13. FUNKCJE: GRANICE I CIĄGŁOŚĆ 66

13.1. Wprowadzenie 66
13.2. Lista zadań 66
14. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY 69
14.1. Wprowadzenie 69
14.2. Lista zadań 72

1. INDUKCJA MATEMATYCZNA

1.1. **Wprowadzenie.** Zbiór liczb naturalnych oprócz działań arytmetycznych posiada naturalny *porządek*, tzn. dla każdych dwóch liczb n, m możemy określić, że jedna z nich jest większa od drugiej lub są sobie równe. Porządek ten ma pewną dodatkową własność - każda liczba ma *następującą* i *poprzedzającą* (z wyjątkiem jedynki). Ponadto, zachodzi następujący fakt.

Fakt 1.1
Każdy niepusty zbiór zawarty w zbiorze liczb naturalnych ma element najmniejszy.

Fakt ten jest zupełnie naturalny i będzie to dla nas aksjomat (coś, co przyjmujemy jako prawdę bez dowodu). Przypomnijmy, że *zdaniem logicznym* jest dowolne stwierdzenie mogące być prawdziwe albo nieprawdziwe. Stwierdzenia, które zawierają zmienną, np. $T(n)$: "jest prawdą, że $n \geq 2$"(w skrócie, $T(n): \ n \geq 2$) , stają się zdaniami logicznymi, gdy myślimy o konkretnym $n \in \mathbf{N}$ (w tym wypadku nieprawdziwym dla $n = 1$ i $n = 0$, a prawdziwym w pozostałych przypadkach). Takie zawierające zmienną stwierdzenia nazywamy *funkcjami zdaniowymi*.

Twierdzenie 1.2 (Zasada Indukcji Matematycznej = ZIM)
Niech $T(n)$ będzie zdaniem logicznym dla $n \in \mathbf{N}$. Załóżmy, że:

- **Z1:** zdanie $T(1)$ jest prawdziwe oraz
- **Z2:** dla dowolnego $k \in \mathbf{N}$ zdanie $T(k)$ implikuje $T(k+1)$,

Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Przyjrzyjmy się na chwilę istocie tego twierdzenia. Początkowo mamy zdanie logiczne $T(n)$, ale jeszcze nie wiemy, dla których n jest ono prawdziwe, a dla których fałszywe. ZIM mówi nam, że $T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ o ile sprawdzimy założenia **Z1** i **Z2**. Przypomnijmy, że żeby pokazać implikację zakładamy poprzednik implikacji i udowadniamy następnik. I tutaj właśnie kryje się moc indukcji: pokazujemy, że $T(k+1)$ jest prawdziwe zakładając (wiedząc), że zdanie o mniejszym indeksie $T(k)$ jest już prawdziwe (myślimy o konkretnym k i $k+1$). Bez ZIM musielibyśmy bezpośrednio pokazać, że każde ze zdań $T(n)$ jest prawdziwe nie mając dodatkowego założenia.

Dowód ZIM. Skorzystamy z faktu 1.1. Załóżmy, że **Z1** i **Z2** zachodzą i pokażemy, że $T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$. Skorzystamy z metody dowodu *nie wprost* [1] , czyli **założymy**, że $T(n)$ jest nieprawdziwe dla pewnego (być może wielu) n. Rozważmy następujący podzbiór $\mathbf{N}$:

$$A = \{n \in \mathbf{N} \ : \ T(n) \text{ jest zdaniem fałszywym}\}.$$

[1] Metoda *nie wprost* polega na tym, że zamiast pokazać, że zdanie ψ jest prawdą, myślimy: co by było, gdyby ψ nie było prawdą. Jeśli okaże się, że zaprzeczenie ψ prowadzi do sprzeczności (jest nieprawdą), to wyjściowe zdanie ψ musiało być prawdą. Metoda *nie wprost* często ułatwia dowody, więc w przyszłości będziemy jej często używali.

Teraz, zgodnie założeniem nie wprost, A nie jest zbiorem pustym, więc z faktu 1.1 musi mieć element najmniejszy. Oznaczymy go przez n_0. Jeśli $n_0 = 1$, to mamy sprzeczność z **Z1**. W przeciwnym wypadku T_{n_0} jest fałszywe, ale T_{n_0-1} jest prawdziwe, więc mamy sprzeczność z **Z2** (dla $k = n_0 - 1$ prawda implikuje fałsz). Dostajemy sprzeczność, więc zdanie: "$T(n)$ jest nieprawdziwe dla pewnego (być może wielu) n" okazało się nieprawdziwe, czyli jego zaprzeczenie: "$T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$" jest prawdziwe. □

ZIM mówi o dowolnych zdaniach logicznych numerowanych liczbami naturalnymi, więc można jej używać właściwie w każdej dziedzinie matematyki. Poniższy przykład jest znanym wzorem na sumę ciągu arytmetycznego: $1, 2, 3, ..., n$.

Przykład 1.3
Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi:

$$1 + 2 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Wzór (1.1) można udowodnić na wiele sposobów. Tutaj oczywiście pokażemy dowód wykorzystujący ZIM.

Dowód. Niech $T(n)$ dla $n \in \mathbf{N}$ oznacza zdanie z (1.1). Zgodnie z ZIM musimy sprawdzić:

- **Z1:** Tutaj $T(1)$ oznacza po prostu $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, więc $T(1)$ jest prawdziwe.
- **Z2:** Zakładamy (czyli wiemy), że $T(k)$ jest prawdą dla pewnego $k \in \mathbf{N}$, czyli:

$$1 + 2 + ... + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Teraz pokażemy $T(k+1)$ korzystając z (1.2). Mamy

$$1 + 2 + ... + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

i to jest dokładnie $T(k+1)$. Zauważmy, że w pierwszej równości wykorzystaliśmy założenie (tzw. *założenie indukcyjne*), a dalej już były zwykłe przekształcenia.

Używając ZIM (ponieważ **Z1** i **Z2** są spełnione) wzór (1.1) jest prawdziwy dla każdego $n \in \mathbf{N}$. □

Przykład 1.4
Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez 6.

Dowód. Zgodnie z ZIM sprawdzamy:

- **Z1:** dla $n = 1$ liczba $7^1 - 1 = 6$ jest podzielna przez 6,
- **Z2:** zakładamy, że dla $k \in \mathbf{N}$ liczba $7^k - 1$ jest podzielna przez 6, czyli istnieje $K \in \mathbf{N}$, takie że $7^k - 1 = 6K$. Wtedy

$$7^{k+1} - 1 = 7^{k+1} - 7^k + 7^k - 1 = 7^k(7-1) + 6K = 6(7^k + K).$$

Ponieważ ta ostatnia liczba jest podzielna przez 6, to pokazaliśmy implikację z ZIM, więc z ZIM wynika że $6|7^n - 1$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$[2].

□

[2] Zapis $k|n$ dla $k, n \in \mathbf{N}$ oznacza, że k jest dzielnikiem n (lub, równoważnie, n jest wielokrotnością k)

Przykład 1.5
Udowodnij, że n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe, a żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, rozcina płaszczyznę na $\frac{n(n+1)}{2}+1$ obszarów.

Dowód. Użyjemy ZIM.

- **Z1:** Jedna prosta dzieli płaszczyznę na $2 = \frac{1 \cdot 2}{2} + 1$ obszary.
- **Z2:** Załóżmy, że k prostych jak w zadaniu dzieli płaszczyznę na $\frac{k(k+1)}{2}+1$ obszarów. Kolejna, $(k+1)$-sza dorysowana prosta przecina wszystkie pozostałe k prostych (i to poza punktami przecięć tych prostych), zatem przecina $k+1$ obszarów na dwie części, więc liczba obszarów zwiększy się o $k+1$ i będzie wynosiła:

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

□

ZIM można modyfikować na wiele sposobów. Może się zdarzyć, że $T(n)$ jest nieprawdziwe dla kilku początkowych n, ale od pewnego n_0 podejrzewamy, że jest już prawdziwe.

Uwaga 1.6
Jeśli pokażemy, że:

- **Z1:** $T(n_0)$ jest prawdziwe,
- **Z2:** $T(k) \implies T(k+1)$ dla $k \geq n_0$,

to ZIM dowodzi, że dla każdego $n \geq n_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Podobnie, może się zdarzyć, że nie potrafimy pokazać "kroku" $T(k) \implies T(k+1)$, ale umiemy pokazać większy "krok".

Uwaga 1.7
Jeśli $T(n_0)$ jest prawdą, oraz dla pewnego $r \in \mathbf{N}$ mamy implikację $T(k) \implies T(k+r)$ (dla $k \geq n_0$), to ZIM mówi, że prawdziwe są $T(n_0), T(n_0+r), T(n_0+2r), \ldots$. Ogólnie: $T(n_0+nr)$ są prawdziwe dla $n \in \mathbf{N}$.

Przykład 1.8
Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 6$ kwadrat można podzielić na n kwadratów.

Dowód. Niech $T(n)$ będzie zdaniem: "kwadrat można zbudować z n kwadratów". Zauważmy, że kwadrat można zbudować z 6 kwadratów (jeden o boku 2 i 5 o boku 1), 7 kwadratów (3 o boku 2, 4 o boku 1) i 8 kwadratów (jeden o boku 3 i 7 o boku 1). **Z1:** Zatem $T(6), T(7)$ i $T(8)$ są prawdziwe. Ponadto, jeśli mając dany dowolny podział i jeden z kwadratów podzielimy na 4 mniejsze, to w nowym podziale są o 3 więcej kwadraty. **Z2:** To pokazuje, że $T(k) \implies T(k+3)$ dla dowolnego $k \in \mathbf{N}$. Z pokazanych **Z1** i **Z2** zmodyfikowana ZIM dowodzi, że $T(n)$ jest prawdziwe dla $n \geq 6$. □

Przykład 1.9
Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1000000n < 2^n + 19000000\,.$$

Dowód. Powyższa nierówność jest oczywista dla $n = 1, \ldots, 19$. Dla $n = 20$ nierówność jest spełniona ponieważ $1000000 < 2^{20}$ (bo $2^{10} > 1000$). Korzystając z indukcji (sprawdzonej już dla $n = 19$) pokażemy krok indukcyjny $T(k) \implies T(k+1)$ dla $k \geq 20$. Załóżmy, że $1000000k < 2^k + 19000000$. Wtedy

$$1000000(k+1) = 1000000k + 1000000 < 2^k + 19000000 + 1000000 < 2^{k+1} + 19000000,$$

przy czym ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo sprawdziliśmy już, że $1000000 < 2^k$ dla $k \geq 20$. $\square$

1.2. **Lista zadań.**

---

1. Udowodnij wzory:

(a)
$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1,$$

(b)
$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Udowodnij, że:

(a)
$$5|n^5 - n,$$

(b)
$$6|n^3 + 5n.$$

3. Przeprowadź drugi krok indukcyjny w dowodzie wzoru: $n^2 = (n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})$. Czy wzór ten jest prawdziwy?

4. Dla $n > 2$ udowodnij nierówność $2^n > 2n + 1$.

5. Udowodnij indukcyjnie, że każdą kwotę n zł ($n \geq 4$) można rozmienić na dwuzłotówki i pięciozłotówki.

6. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, ze prawdziwe sa $T(1)$ i $T(6)$, oraz ze dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+3)$. Które zdania $T(n)$ są prawdziwe? Czy pozostałe zdania są fałszywe?

---

7. Udowodnij wzory:

(a)
$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

(b)
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

(c)

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + ... + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4},$$

(d)

$$(2^{2^0} + 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 2) \cdot (2^{2^3} + 1) \cdot ... \cdot (2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

8. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Następnie zgadnij wzór, który daje wynik dla dowolnego n i udowodnij indukcyjnie, że ten wzór zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$.

9. Udowodnij następujące nierówności:

(a) dla $n \in \mathbf{N}$,

$$n(n+1) \leq 2^n + 4,$$

(b) dla $n \in \mathbf{N}$,

$$10n < 2^n + 25,$$

(c) dla $x > -1$, $n \in \mathbf{N}$ (nierówność Bernoulliego):

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

(d) dla $n > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$$

(e) dla $n > 3$,

$$(n+1)^n < n^{n+1},$$

10. Uzasadnij podzielności:

(a) $19|(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1})$,

(b) $133|(11^{n+1} + 12^{2n-1})$.

11. Pokaż indukcyjnie, że zbiór, który ma n elementów, ma dokładnie 2^n podzbiorów.

12. Udowodnij przez indukcję, że liczba przekątnych w n-kąta wypukłego jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$

13. Dowiedź, ze dla każdej liczby naturalnej $n \geq 200$ sześcian można podzielić na n sześcianów.

14. Dowiedź, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \ .$$

15. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)} .$$

16. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6} .$$

17. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi
$$9 \cdot (3n)! \cdot n \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \cdot (3^n \cdot n!)^3 .$$
W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$.

18. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie:
$$a_0 = -1, \quad a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} \text{ dla } \; n \geq 1.$$
Udowodnij, że $a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$.

19. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie:
$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}.$$
Policz kilka początkowych wyrazów tego ciągu, zgadnij wzór na n-ty wyraz, a następnie udowodnij ten wzór używając indukcji.

20. Liczby a_n, b_n sa określone wzorami
$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_{n+1} + a_n.$$
Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2a_n^2 - b_n^2$ jest równa ± 1.

21. Znajdź błąd w w następującym dowodzie: wykaż, że dla $n \in \mathbf{N}$ zachodzi nierówność
$$30n < 2^n + 110.$$
Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2+110 = 112$. Załóżmy, że $30k < 2^k + 110$. Udowodnimy nierówność $30(k+1) < 2^{k+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:
$$30(k+1) = 30k + 30 < 2^k + 110 + 30 = 2^{k+1} + 110 + 30 - 2^k < 2^{k+1} + 110,$$
przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $k \geq 5$. Zatem nierówność (21) została udowodniona dla $n \geq 5$. Pozostaje sprawdzić, że: dla $n = 2$ mamy $60 < 4+110 = 114$, dla $n = 3$ mamy $90 < 8+110 = 118$, dla $n = 4$ mamy $120 < 16+110 = 126$. Tym samym nierówność (21) jest udowodniona dla wszystkich W szczególności wykazaliśmy, ze dla $n = 6$ zachodzi nierówność $180 < 174$. Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu? $\square$

22. Wskaż błąd w dowodzie twierdzenia: wszystkie koty są tego samego koloru.

Dowód. Wystarczy wykazać, że w dowolnym zbiorze zawierającym n kotów, gdzie $n \in \mathbf{N}$, wszystkie koty są tego samego koloru.

- **Z1** Warunek początkowy, to sprawdzenie dla $n = 1$. Oczywiście w zbiorze zawierającym tylko jednego kota wszystkie koty są tego samego koloru.
- **Z2:** Załóżmy, że udowodniliśmy twierdzenie dla wszystkich liczb naturalnych od 1 do $n-1$, dowodzimy dla n. Weźmy dowolny zbiór A zawierający n kotów. Pokażemy, że koty ze zbioru A są tego samego koloru. Wrzucając z A pewnego kota X otrzymamy zbiór zawierający $n-1$ kotów - możemy skorzystać z założenia indukcyjnego, żeby stwierdzić, że wszystkie koty w A oprócz X mają ten sam kolor. Ale teraz, wrzucając z A kota Y (innego niż X), wnioskujemy z założenia indukcyjnego, że kot X ma ten sam kolor, co pozostałe koty w A. Wobec tego wszystkie koty w A mają ten sam kolor.

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej wszystkie koty są tego samego koloru.

□

23. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że $x^n + \frac{1}{x^n}$ jest liczbą całkowitą dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

24. Pokaż, że dla liczb rzeczywistych $x_1, ..., x_n$ zachodzi:

(a) $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$,

(b) $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ...|x_n|$.

25. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz ze dla dowolnego $n \geq 6$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że:

(a) prawdziwe jest $T(10)$

(b) prawdziwe jest $T(11)$

(c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \implies T(13)$

(d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \implies T(1)$

(e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \implies T(3)$

26. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+1)$. Czy stad wynika, że:

(a) $T(5)$ jest fałszywe

(b) $T(10)$ jest prawdziwe

(c) $T(15)$ jest fałszywe

(d) $T(20)$ jest prawdziwe

27. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(25)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 20$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+2)$ oraz dla każdej liczby naturalnej $4 \leq n \leq 30$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n-3)$. Czy stad wynika, że prawdziwe jest:

(a) $T(37)$

(b) $T(38)$

(c) $T(10)$

(d) $T(11)$

28. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ liczba $(n-1)^2$ jest dzielnikiem liczby $n^n - n^2 + n - 1$.

29. Ciąg Fibbonacciego f_n zadany jest rekurencyjnie: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

30. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

wedle następującego planu:

(a) udowodnij ją dla $n = 2$,

(b) udowodnij, że jeśli jest ona prawdziwa dla $n = k$, to jest też prawdziwa dla $n = 2k$,

(c) udowodnij, że jeśli $k < \ell$ i nierówność jest prawdziwa dla $n = \ell$ to jest też prawdziwa dla $n = k$,

(d) wywnioskuj tezę z $(a) - (c)$.

31. Dane są klocki o kształcie sześcianu o wymiarach $2 \times 2 \times 2$ z usuniętym narożnikiem $1 \times 1 \times 1$. Używając tych klocków zbuduj sześcian o wymiarach $2^n \times 2^n \times 2^n$ z usuniętym narożnikiem $1 \times 1 \times 1$.

32. Boki pewnego wielokąta wypukłego zaznaczono z zewnątrz cienką kolorową linią. W wielokącie zaznaczono kilka przekątnych i każdą z nich - również z jednej strony - zaznaczono cienką kolorową linią. Wykaż, że wśród wielokątów, na które narysowane przekątne dzielą wyjściowy wielokąt, istnieje taki, którego wszystkie boki są zaznaczone z zewnątrz.

33. Dana jest liczba naturalna k. Dowiedź, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mających więcej niż 3^k elementów możemy wybrać $(k+1)$-elementowy podzbiór S o następującej własności:
– dla dowolnych dwóch różnych od siebie podzbiorów $A, B \subset S$ suma wszystkich elementów z A jest rożna od sumy wszystkich elementów z B.

34. Udowodnij, że dla różnych liczb całkowitych a, b, c i dowolnej liczby naturalnej n poniższa liczba jest całkowita:

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}.$$

35. Niech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych takich, że $a_1 = \frac{1}{2}$ oraz $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$. Udowodnij, że $a_n < \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$.

36. Na pustyni na drodze w kształcie okręgu jest pewna liczba stacji benzynowych, a na każdej pewna ilość paliwa. Wiadomo, że paliwa na wszystkich stacjach łącznie wystarcza do przejechania drogi naokoło. Udowodnij, że istnieje stacja, taka że samochód startujący z tej stacji jadąc w wybraną stronę przejedzie całą drogę naokoło.

2. SYMBOL NEWTONA

2.1. **Wprowadzenie.** Przypomnijmy, że $n!$ oznacza w skrócie iloczyn $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ oraz $0! = 1$. Mamy dane dwie liczby: $n \in \mathbf{N}$ oraz $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Symbolem Newtona nazywamy liczbę daną wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{2.1}$$

Jest jasne, że $\binom{n}{k}$ (czytamy: "n nad k") jest zawsze liczbą wymierną. Okazuje się jednak, że są one zawsze naturalne i mają ważne znaczenie w algebrze i kombinatoryce. Zanim jednak to zobaczymy przyjrzymy się własnościom tych liczb. Poniżej mamy wypisane liczby $\binom{n}{k}$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ i $k \in \{0, ..., n\}$.

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Można łatwo sprawdzić, że zawsze $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ oraz $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Ponadto: (prawie) każda z nich jest sumą dwóch "ponad nią". Jest to kluczowa obserwacja, którą później wykorzystamy.

Fakt 2.1
Dla $n \in \mathbf{N}$ oraz $k \in \{1, ..., n\}$ mamy

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{2.2}$$

Dowód. Obliczymy prawą stronę równości (2.2).

$$\begin{aligned}
(P) &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.
\end{aligned}$$

□

Następujące twierdzenie jest uogólnieniem wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ w którym symbol Newtona gra kluczową rolę.

Twierdzenie 2.2 (Wzór dwumianowy Newtona)
Dla $a, b \in \mathbf{R}$ oraz $n \in \mathbf{N}$ zachodzi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{2.3}$$

Dowód. Skorzystamy z ZIM.

- **Z1:** Dla $n = 1$ obie strony są równe $a + b$.

- **Z2:** Załóżmy, że wzór zachodzi dla wszystkich $a, b \in \mathbf{R}$ i pewnego n.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} = (\clubsuit).$$

Teraz wystarczy uważnie przyjrzeć się wyrażeniom występującym w oby sumach. Przy wyrażeniu $a^j b^{n+1-j}$ (dla $j \in \{1, ..., n\}$) w pierwszej sumie mamy współczynnik $\binom{n}{j-1}$ a w drugiej $\binom{n}{j}$. Poza tym, z w pierwszej sumie jest jeszcze składnik a^{n+1} a w drugiej b^{n+1}. Korzystając z (2.2) otrzymujemy:

$$(\clubsuit) = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)a^j b^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j},$$

co chcieliśmy otrzymać.

□

Dla kilku pierwszych n wzór (2.3) wygląda następująco:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \quad (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Kolejne twierdzenie pokazuje, że symbol Newtona ma również naturalne znaczenie kombinatoryczne. W przyszłości będziemy czasem wykorzystywać ten dualizm zmieniając problemy algebraiczne na kombinatoryczne i odwrotnie.

Twierdzenie 2.3
Niech zbiór X ma dokładnie n elementów. Dla $k \in \{0, 1, ..., n\}$ liczba podzbiorów zbioru X mających dokładnie k elementów wynosi $\binom{n}{k}$.

Dowód. Twierdzenie 2.3 można wyprowadzić z twierdzenia 2.2 i to będzie treścią problemu 22. Tutaj podamy bezpośredni dowód indukcyjny (po zmiennej n)[3].

- **Z1:** Dla $n = 1$ są dwie możliwości: jest jeden podzbiór jednoelementowy i jeden podzbiór pusty. Równocześnie $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$.
- **Z2:** Zakładamy, że dla pewnego $n \in \mathbf{N}$ i **wszystkich** $k \in \{0, ..., n\}$ twierdzenie zachodzi. Rozważamy podzbiory j elementowe zbioru $n+1$ elementowego (dla $j \in \{0, ..., n+1\}$). Gdy $j = 0$ lub $j = n+1$ mamy jeden podzbiór i twierdzenie się zgadza. Rozważmy $j \in \{1, ..., n\}$. Wybierzmy jeden ustalony element x zbioru X na bok. Policzymy podzbiory j-elementowe zbioru X dzieląc je na dwie (rozłączne) części: zawierające x i nie zawierające x. Tych pierwszych jest $\binom{n}{j-1}$ (bo z pozostałych n elementów dobieramy do x dokładnie $j-1$), a tych drugich $\binom{n}{j}$ (skoro x nie należy do podzbioru, to z pozostałych n wybieramy dokładnie j). Zgodnie ze wzorem (2.2) suma tych dwóch liczb wynosi $\binom{n+1}{j}$, co mieliśmy udowodnić.

□

Zauważmy, że z twierdzenia 2.3 wynika, że wszystkie liczby $\binom{n}{k}$ są całkowite, co nie było wcale jasne z definicji (2.1). Można to jednak pokazać bezpośrednio, zobacz problem 23.

[3] W tym twierdzeniu występują dwie zmienne n i k. Przeprowadzając dowód indukcyjny po zmiennej n mamy na myśli zdania $T(n)$: "twierdzenie zachodzi dla n i wszystkich możliwych k".

2.1.1. *Uwagi.*

Uwaga 2.4
Niech $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$. Wtedy:

1.
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

2. dla $0 \leq k_1 < k_2 \leq [n/2]$ zachodzi
$$\binom{n}{k_1} < \binom{n}{k_2}.$$

Dowód. Wzór **1.** wynika wprost z definicji (2.1) (sprawdź). Alternatywnie, z twierdzenia 2.3, możemy go uzasadnić następująco: gdy zbiór X ma n elementów, to jest tyle samo podzbiorów k-elementowych i $n-k$ elementowych ponieważ każdemu zbiorowi k-elementowemu odpowiada dokładnie jedno $n-k$-elementowe dopełnienie.

Aby udowodnić **2.** wystarczy pokazać, że $\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$ dla $1 \leq k \leq [n/2]$ (zauważ, że to wystarczy). Wystarczy sprawdzić, że
$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} < \frac{n!}{k!(n-k)!},$$
co po uproszczeniu sprowadza się do
$$k < n-k+1,$$
a to jest prawdziwe dla powyższych k. □

2.1.2. *Przykłady.* Jako wprowadzenie do metod kombinatorycznych wykorzystywanych w algebrze podamy teraz inny dowód faktu 2.1.

Dowód. Niech X będzie ustalonym zbiorem n-elementowym. Lewą stronę (2.2) możemy interpretować jako liczbę podzbiorów k-elementowych zbioru X. Policzmy tę liczbę inaczej: ustalmy element $x \in X$ i policzmy zbiory zawierające x oraz nie zawierające X, które mają k elementów. Pierwszych jest $\binom{n-1}{k-1}$ a drugich $\binom{n-1}{k}$, co po dodaniu daje prawą stronę (2.2). □

Przykład 2.5
Dla $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$, zachodzi
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dowód. Powyższy wzór udowodnimy przez znalezienie interpretacji kombinatorycznej, która odczytana na dwa sposoby da obie strony równania. Zauważmy najpierw, że
$$\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}.$$
Załóżmy, że mamy zbiór X, który ma $2n$ elementów. Prawa strona to oczywiście liczba wyborów połowy elementów ze zbioru X. Podzielmy zbiór X na dwa równoliczne zbiory X_1 i X_2. Żeby wybrać n elementów ze zbioru X wybieramy k elementów ze zbioru X_1 oraz $n-k$ ze zbioru X_2. Postępując tak dla $k = 0, 1, ..., n$ dostajemy wszystkie wybory n elementów z X (sprawdź, że to wszystkie i każdy uwzględniliśmy). □

2.2. **Lista zadań.**

1. Oblicz ile jest podzbiorów 4-elementowych zbioru 6-elementowego.
2. Policz potęgi: $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(x+1)^4$, $(x+1)^5$.
3. Policz ile jest podzbiorów $0, 1, 2, 3, 4$-elementowych zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.
4. Znajdź wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}\right)^{12}$ w którym nie występuje x.
5. Wyznacz współczynnik przy x^7 w wielomianie $(5-2x)^{10}$.
6. Uporządkuj rosnąco następujące liczby:
$$\binom{100}{7}, \quad \binom{100}{27}, \quad \binom{100}{47}, \quad \binom{100}{57}, \quad \binom{100}{77}, \quad \binom{100}{97}.$$

---

7. Znajdź te wyrazy rozwinięcia dwumianu $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$, które są liczbami naturalnymi.
8. Rozwiąż równanie $\binom{n}{2} = 66$.
9. Uzasadnij (można to zrobić na co najmniej trzy sposoby), że
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$
10. Policz sumy:
   (a)
$$\binom{n}{0} \cdot 2^0 + \binom{n}{1} \cdot 2^1 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 2^n,$$
   (b)
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$$
11. Wyznacz liczby całkowite n, m, wiedząc że $m - n\sqrt{3} = (3-\sqrt{3})^5$.
12. Dowiedź, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.
    Wskazówka: $(1+1)^{2n}$
13. Wskaż taką liczbę x, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość
$$\binom{n}{k} + x\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$
14. Rozwiąż równanie
$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$
    w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$.
15. Dowiedz, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość
$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}.$$
16. Dowiedz, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość
$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$
17. Dowiedz, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość
$$\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{2} = \frac{n \cdot [(n-1)!]^2}{2^{n-1}}.$$

18. Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n} < 7^n$.

19. Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n+3}{n} < \frac{3}{2} \cdot 4^n$.

20. Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}.$$

21. Czy równość $2 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ jest prawdziwa dla

a) $n = 8, \ \ k = 2$ **b)** $n = 10, \ \ k = 3$ **c)** $n = 15, \ \ k = 4$ **d)** $n = 17, \ \ k = 5$

---

22. Korzystając z prawa mnożenia nawiasów "każdy z każdym" wywnioskuj ze wzoru (2.3), że współczynnik przy $a^k b^{n-k}$ w wyrażeniu $(a+b)^n$ musi wynosić dokładnie tyle co liczba podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego.

23. Niech $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$ oraz p będzie liczbą pierwszą. Policz przez jaką maksymalną potęgę liczby pierwszej p dzieli się $n!$. Zrób to samo dla k i $n-k$ zamiast n. Wywnioskuj z tego, że $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ jest liczbą całkowitą (bez odwoływania się do interpretacji kombinatorycznej).

24. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{4n}{2n} < 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$

25. Przy odpowiednich założeniach na n, k (takich, że wszystkie symbole istnieją), udowodnij wzory:

(a)
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$$

(b)
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k},$$

(c)
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

(d)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{2}2^{2n+1} = 4^n,$$

(e)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k},$$

(f)
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

(g)
$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2},$$

(h)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2},$$

(i)

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 4^n,$$

26. Dowiedź, że istnieje taka liczba całkowita, $n > 2003$, że w ciągu:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{2003},$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

---

3. LICZBY WYMIERNE I NIEWYMIERNE

3.1. **Wprowadzenie.** Liczby naturalne, całkowite i wymierne (jak również działania w tych zbiorach) są zdefiniowane bardzo naturalnie. Przypomnijmy tylko, że liczby wymierne to liczby, które można zapisać w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbf{Z}$ oraz $q \in \mathbf{N}$, oraz że takich zapisów dla każdej liczby wymiernej jest nieskończenie wiele.

Aby dokładnie poznać liczby rzeczywiste, a co za tym idzie - niewymierne $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, musimy ustalić czym dokładnie taka liczba rzeczywista jest. Zaczniemy od ważnego przykładu.

Przykład 3.1
Liczba $0,999... = 0,(9)$ jest wymierna i wynosi dokładnie 1.

Dowód. Oznaczmy $x = 0,(9)$. Wtedy $10x = 9,(9)$ oraz $10x - x = 9$. Zatem $x = 1$. □

Można powiedzieć, że powyższy przykład jest trochę "oszukany", bo nie powiedzieliśmy jeszcze dokładnie czym są liczby rzeczywiste, skąd więc możemy wiedzieć, że liczba $0,(9)$ istnieje i jak zdefiniować na niej działania. Okaże się jednak, że to wszystko miało prawdziwy sens. Zauważmy jednak, że trzeba do tego typu trików podchodzić ostrożnie - rozważmy $y = 1+3+9+27+81+243+\ldots$. Wówczas $y = 1+3\cdot 1+3\cdot 3+3\cdot 9+3\cdot 27+3\cdot 81+3\cdot 243+\ldots = 1 + 3\cdot(1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \ldots) = 1 + 3y$, skąd $y = -1/2$. Jak to możliwe, że suma liczb całkowitych dodatnich jest ujemna i niecałkowita? Nie jest to możliwe, bo okaże się, że y nie jest liczbą rzeczywistą.

Istnieje kilka podejść do "konstrukcji" liczb rzeczywistych z liczb wymiernych. Ponieważ są one dość "techniczne", nasza definicja zbioru $\mathbf{R}$ będzie następująca.

Definicja 3.2
Liczbą rzeczywistą nazywamy dowolne rozwinięcie dziesiętne

$$a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} ... ,$$

gdzie $n \in \mathbf{N}$.

W powyższym przedstawieniu a_2 jest po prostu liczbą setek (jeśli występuje), a a_{-1} pierwszą liczbą po przecinku.

Uwaga 3.3
Ponieważ widzieliśmy, że $1,000... = 0,999...$, więc pewne, formalnie różne, przedstawienia liczb w postaci zapisu dziesiętnego dają tę samą liczbę. Musimy więc dodać, że każda liczba, która kończy się nieskończoną liczbą dziewiątek (np. 12345,678(9)) oraz liczba powiększoną o 1 na pierwszym miejscu przed dziewiątkami i mającą nieskończenie wiele zer na dalej (tutaj: $12345,679$) są tą samą liczbą. Wśród pozostałych liczb już nie ma takiego problemu.

Tak zdefiniowany zbiór $\mathbf{R}$ ma wszystkie pożądane własności. Można wykonywać wszystkie działania arytmetyczne, występuje naturalny porządek (wiemy która z dwóch różnych liczb rzeczywistych jest większa), zachodzą prawa rozdzielności, itd. Nie będziemy tutaj wnikać w omawianie wszystkich szczegółów.

3.1.1. *Uwagi.* Przyjrzyjmy się podziałowi $\mathbf{R}$ na $\mathbf{Q}$ (wymierne) i $\mathbf{IQ} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (niewymierne).

Fakt 3.4
Liczby rzeczywiste wymierne, to dokładnie te, które mają postać dziesiętną skończoną lub okresową.

Dowód. Jeśli liczba jest wymierna, to jest postaci $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$, i z algorytmu dzielenia z resztą wynika, że przyjmuje postać dziesiętną skończoną ("dzielenie się kończy") lub okresową ("dzielenie się zapętla").

Odwrotnie, gdy liczba rzeczywista x ma postać skończoną, to jest postaci $x = \frac{n}{10^N}$, czyli jest wymierna. Jeśli natomiast x ma okres długości N, to $10^N x - x = 99...99x$ jest liczbą o rozwinięciu skończonym, czyli $99...99x$ jest wymierna i wtedy x również jest wymierna. □

Ważnym faktem jest tzw. "gęstość" liczb wymiernych (lub niewymiernych) w zbiorze liczb rzeczywistych. Ten fakt można zapisać następująco.

Fakt 3.5
W dowolnym przedziale (a, b) na prostej rzeczywistej $(a < b)$ znajduje się zarówno liczba wymierna, jak i niewymierna.

Dowód. Niech $d = b - a$ będzie długością przedziału (a, b). Rozważmy środek przedziału $c = (a + b)/2$. Mamy dwa przypadki:

- jeśli c jest wymierne, to $x = c + \frac{\sqrt{2}}{2^N}$ jest niewymierne (patrz ćwiczenie 5) oraz dla N tak dużego, że $\frac{\sqrt{2}}{2^N} < d/2$ liczba x należy do przedziału (a, b),
- jeśli c jest niewymierne, to ucinając zapis dziesiętny liczby c od miejsca N zmieniamy c w liczbę wymierną i zmieniamy ją o najwyżej 10^{-N+1}. Biorąc N tak duże, że $10^{-N+1} < d/2$ dostajemy w ten sposób liczbę wymierną, która jest w przedziale (a, b).

□

Konsekwencją tego faktu jest ważna własność: dowolnie blisko każdej liczby rzeczywistej x leżą zarówno liczby wymierne jak i niewymierne. Aby to zobaczyć wystarczy zastosować fakt 3.5 do przedziałów $(x - 10^{-n}, x + 10^{-n})$.

3.1.2. *Przykłady.*

Przykład 3.6
Liczba $123,43434343...$ jest równa $\frac{12220}{99}$.

Dowód. Niech x oznacza liczbę rzeczywistą $123,(43)$. Wtedy $100x = 12343,(43)$ i odejmując stronami dostajemy $99x = 12220$, a więc $x = \frac{12220}{99}$. □

Przykład 3.7
Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, tzn. nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat wynosi 2.

Dowód. Skorzystamy z metody "nie wprost". Gdyby $\sqrt{2}$ był wymierny, to istniałyby $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$ takie, że $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, albo inaczej $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Dodatkowo możemy założyć, że p i q nie mają wspólnych dzielników pierwszych, czyli "postać $\frac{p}{q}$ jest nieskracalna". Po pomnożeniu przez q^2 dostajemy $2q^2 = p^2$ z czego wynika, że p musi być liczbą parzystą. Niech $p = 2r$. Wtedy $2q^2 = 4r^2$, czyli $q^2 = 2r^2$, z czego z kolei wynika, że q jest liczbą parzystą. Ponieważ 2 jest dzielnikiem zarówno p jak i q dochodzimy do sprzeczności co kończy dowód nie wprost. □

Przykład 3.8
Liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Dowód. Przeprowadzimy kolejny dowód nie wprost[4]. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych, $n, m \in \mathbf{N}$. Wówczas $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ jest równoważne równaniu

$$2^{m/n} = 3,$$

a to oznacza, że $2^m = 3^n$. Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną. □

Przykład 3.9
Liczba $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

Dowód. Niewymierność liczby $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$ będzie wynikała z niewymierności liczby $\sqrt{5}$ (patrz przykład 3.7 oraz zadanie 8). Załóżmy nie wprost, że istnieje $r \in \mathbf{Q}$ takie, że $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2} = r$. Przekształcając,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2} &= r - \sqrt{5} && /(...)^3 \\
2 &= r^3 - 3r^2\sqrt{5} + 3r \cdot 5 - 5\sqrt{5} && /\text{wyznaczamy } \sqrt{5} \\
\sqrt{5} &= \frac{r^3 + 15r - 2}{3r^2 + 5}
\end{aligned}$$

□

3.2. **Lista zadań.**

1. Zamień liczby w postaci ułamkowej na postać dziesiętną i odwrotnie:
   (a) $\frac{3}{7}$, $\frac{31}{70}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{17}{101}$,
   (b) $0,125$, $0,123(45)$, $0,(271)$, $4,23(45)$, 0,1(270).
2. Zapisz liczby w postaci nieskracalnej, a potem dziesiętnej:
$$\frac{2^{13}5^4 7^3}{2^9 5^5 7^2}, \quad \frac{21^4 10^2}{5^3 7^4}.$$
3. Pokaż, że następujące liczby są niewymierne:
$$\sqrt{7}, \quad \sqrt{15}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$
4. Pokaż, że liczba $\log_3 11$ jest niewymierna.
5. Pokaż, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest niewymierna. Czy suma dwóch liczb niewymiernych musi być niewymierna?

---

6. Oblicz podając wynik w postaci ułamka zwykłego
   (a) $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$
   (b) $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$
   (c) $(0,(037))^{0,(3)}$
7. Dowiedź, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.
8. Dla jakich $n \in \mathbf{N}$ liczba $\sqrt{n}$ jest wymierna?

[4] bo jak inaczej pokazać, że coś "nie jest"?

9. Dowiedź, że liczba $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

10. Pokaż, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest niewymierna.

11. Dowiedź, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

12. Dowiedź, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.

13. Dla liczby wymiernej dodatniej $q = m/n$, gdzie $m, n \in \mathbf{N}$, zapisz warunek $\log_2 3 < q$. Wykorzystaj ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$.

14. Rozstrzygnij, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

15. Pokaż błędy w poniższych rozwiązaniach zadania: pokaż, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I: Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w = \sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2 = 3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

16. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

17. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

18. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

19. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

20. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

21. Wskaż liczbę wymierną pomiędzy $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ oraz $\frac{1}{\sqrt{5}}$ oraz liczbę niewymierną pomiędzy $\frac{2}{\sqrt{5}}$ oraz $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

---

22. Dowiedź, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q = 5\ .$$

23. Dowiedź, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

24. Czy liczba
$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$$
jest wymierna?

25. Czy liczba $\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$ jest całkowita?

26. Dowiedź, że
$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1.$$

27. Jak poznać z postaci ułamka $\frac{p}{q}$ (p, q są względnie pierwsze), czy liczba ma zapis dziesiętny skończony, czy okresowy?

28. Co można powiedzieć o postaci ułamka $\frac{p}{q}$, jeśli liczba ma zapis dziesiętny:
(a) skończony
(b) okresowy?

29. Wyznaczyć wszystkie takie pary (a,b) liczb wymiernych dodatnich, że:
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{4+\sqrt{7}}$$

30. Pokaż, że liczba $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ ($n, m \in \mathbf{N}$) jest wymierna tylko wtedy, gdy każdy ze składników jest liczbą wymierną.

31. Pokaż, że poniższe rozwinięcia dziesiętne odpowiadają liczbom niewymiernym.
$$0,101001000100001..., \qquad 0,123...8910111213...192021...$$

---

4. PODZIELNOŚĆ LICZB CAŁKOWITYCH

4.1. **Wprowadzenie.**

4.1.1. *Twierdzenie o dzieleniu z resztą.* W zbiorze liczb całkowitych działania: dodawania, odejmowania i mnożenia są zawsze określone. Dla dwóch liczb całkowitych n, k mówimy, że k jest dzielnikiem n (lub n jest wielokrotnością k) jeśli istnieje liczba całkowita q taka, że $n = q \cdot k$. Zapisujemy to

$$k|n$$

co czytamy "k dzieli n". Często jednak iloraz dwóch liczb całkowitych nie jest liczbą całkowitą, ale możemy zawsze znaleźć wynik dzielenia i resztę, co precyzuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 (Dzielenie z resztą)
Dla liczb $n \in \mathbf{Z}$ i $k \in \mathbf{N}$ istnieją $q \in \mathbf{Z}$ (wynik dzielenia) i $r \in \{0, 1, ..., k-1\}$ (reszta), takie że

$$n = q \cdot k + r.$$

Dowód. Niech q będzie największą liczbą całkowitą, dla której zachodzi

$$k \cdot q \leq n.$$

Zauważmy, że taka największa liczba istnieje (dlaczego?). Zdefiniujmy

$$r = n - k \cdot q.$$

Z definicji wynika, że $q \in \mathbf{Z}$, $r \in \mathbf{N}$ oraz $n = q \cdot k + r$. Pozostaje pokazać, że $r \leq k - 1$. Gdyby $r \geq k$, to

$$0 \leq r - k = n - (k+1)q.$$

Jednak to przeczy maksymalności wyboru k, więc tak być nie może i $r \leq k - 1$[5]. □

Dla przykładu $5000 = 7 \cdot 714 + 2$, czyli dzieląc 5000 przez 7 otrzymujemy wynik 714 i resztę 2. Czasem zdarza się, że nie interesuje nas wynik, a jedynie reszta z dzielenia. W naszym przykładzie możemy pomyśleć tak:

$$5000 = 50 \cdot 100 = (49 + 1)(98 + 2) = 7 \cdot n + 2,$$

gdzie n jest pewną liczbą naturalną, gdyż zarówno 49 jak i 98 są podzielne przez 7. W tego typu sytuacjach możemy użyć zapisu kongruencji, który w tym wypadku wyglądałby tak:

$$(49 + 1)(98 + 2) \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 7$$

4.1.2. *Kongruencje.* Kongruencje wykorzystujemy, gdy mamy liczby całkowite, ale nie interesuje nas dokładna wartość liczby całkowitej, ale reszta z dzielenia przez jakąś konkretną ustaloną liczbę. Zapis

$$n \equiv m \pmod k$$

oznacza dokładnie że

$$k|(n - m),$$

czyli k jest dzielnikiem liczby $n - m$ lub, równoważnie, reszta z dzielenia liczb n i m przez k jest taka sama. Czytamy: "n przystaje do m modulo k". Na przykład

$$50 \equiv 36 \equiv 8 \pmod{14}.$$

Użyteczność kongruencji opiera się w sporej mierze na następującym fakcie.

[5] To jest tzw. "dowód nie wprost"

Twierdzenie 4.2 (Własności kongruencji)
Niech n będzie liczbą naturalną oraz:

$$a \equiv b \pmod{k},$$
$$c \equiv d \pmod{k}.$$

Wtedy:

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{k},$$
$$ac \equiv bd \pmod{k},$$
$$a^n \equiv b^n \pmod{k}.$$

Innymi słowy kongruencje można dodawać, odejmować, mnożyć i potęgować pod warunkiem, że liczymy "modulo" to samo k.

Przykład 4.3
Znajdź cyfrę jedności liczby 7^{102}.

Rozwiązanie. Mamy

$$7^2 \equiv -1 \pmod{10},$$

a więc

$$(7^2)^{51} \equiv (-1)^{51} = -1 \pmod{10}.$$

Szukaną resztą jest zatem 9. □

4.1.3. *Jeszcze trochę faktów.* W tym podrozdziale podamy kilka przydatnych faktów.

Twierdzenie 4.4
Jeśli dwie liczby a, b są podzielne przez k, to również $a - b, a + b, 2a + 3b, ...$ (ogólnie $ma + nb$ dla $m, n \in \mathbf{Z}$) są podzielne przez k.
Jeśli dwie liczby dają tę samą resztę z dzielenia przez k, to ich różnica jest podzielna przez k.

Dowód powyższego faktu pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Zamiast tego zobaczmy zastosowanie.

Przykład 4.5
Dane sa takie liczby całkowite k, l, ze liczba $k + 2l$ jest podzielna przez 3. Wykaz, że liczba $2k + l$ też jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie. Mamy $3|3k + 3l$ oraz $3|k + 2l$, więc również

$$3|(3k + 3l) - (k + 2l) = 2k + l.$$

□

Przypomnijmy przy okazji zapis, który będzie używany w zadaniach:

$$\overline{c_n c_n \dots c_2 c_1 c_0} = 10^n \cdot c_n + 10^{n-1} \cdot c_{n-1} + \dots + 10^2 \cdot c_2 + 10 \cdot c_1 + c_0.$$

Fakt 4.6
Liczba $\overline{c_n c_{n-1} ... c_1 c_0}$ dzieli się przez 11 $\Leftrightarrow$ $c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots \pm c_n$ dzieli się przez 11 (*naprzemienna suma*).

Dowód. Zauważmy, że

$$10^n \equiv \begin{cases} -1, & \text{if } 2 \not| n \\ 1, & \text{if } 2|n. \end{cases} \pmod{11},$$

ponieważ $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Zatem

$$\overline{c_n c_{n-1} ... c_1 c_0} \equiv c_0 - c_1 + c_2 - ... \pm c_n \pmod{11}.$$

□

4.1.4. *Przykłady.*

4.2. **Lista zadań.**

---

1. Udowodnij, że liczba b jest podzielna przez a wtedy i tylko wtedy, gdy b daje resztę 0 przy dzieleniu przez a.[6]

2. Znajdź resztę z dzielenia przez 7 liczb: $145 \cdot 19$, $84500 \cdot 497888$.

3. Przez co trzeba podzielić 50, żeby otrzymać resztę 5? Znajdź wszystkie możliwości.

4. Jakie wspólne dzielniki mogą mieć liczby n i $n + 6$, jeśli n jest liczbą naturalną?

5. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to liczba $n \cdot (n + 3)$ jest podzielna przez 9 lub nie jest podzielna przez 3.

6. Znajdź cyfrę jedności sumy

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7 + 8^8 + 9^9 + 10^{10}.$$

7. Uzasadnij, że jeżeli m i n są liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez 3, to jedna z liczb $mn + 1$, $m - n$ jest podzielna przez 3.

8. Uzasadnij, że liczba $321^{654} + 123^{456}$ jest podzielna przez 10.

---

9. Dane sa takie liczby całkowite k, l, m, że liczba $2k + 3l + 4m$ jest podzielna przez 5. Wykaz, ze liczba $k + 2m + 4l$ też jest podzielna przez 5.

10. Dla jakich n wyrażenie $\frac{3n}{2n-1}$ jest liczbą całkowitą?

11. Mamy daną kongruencję $a \equiv b \pmod{c}$ i załóżmy, że liczby a i b dzielą się przez liczbę całkowitą d. Czy można stąd wywnioskować, że $a/d \equiv b/d \pmod{c}$?

12. Mamy daną kongruencję $a \equiv b \pmod{c}$ i załóżmy, że liczby a, b i c dzielą się przez liczbę całkowitą d. Czy można stąd wywnioskować, że $a/d \equiv b/d \pmod{c/d}$?

13. Które liczby naturalne można przedstawić w postaci sumy szóstek i siódemek? (Sumę samych szóstek lub samych siódemek też uważamy za "sumę szóstek i siódemek".)

14. Znajdź dziesięć kolejnych nieparzystych liczb naturalnych, których suma jest podzielna przez 99.

15. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 111, której suma cyfr jest równa 111.

16. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez iloczyn swoich cyfr.

17. Znajdź liczbę trzycyfrową, która jest 7 razy większa od liczby powstałej z niej poprzez wykreślenie środkowej cyfry.

[6] Pewnie wydaje Ci się to oczywiste. Spróbuj zrozumieć intencje patrząc na definicję podzielności i twierdzenie o dzieleniu z resztą.

18. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które przy dowolnym przestawieniu ich cyfr dają liczbą podzielną przez 27

19. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe $\overline{abc}$, których kwadrat kończy się cyframi $\overline{abc}$.

20. Udowodnij, że liczba czterocyfrowa, której cyfra tysięcy jest równa cyfrze dziesiątek, a cyfra setek jest równa cyfrze jedności, nie może być kwadratem liczby naturalnej.

21. Znajdź liczbę czterocyfrową, która jest cztery razy mniejsza od liczby zapisanej wspak.

22. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które są 11 razy większe od sumy woich cyfr.

23. Iloma jednakowymi cyframi może kończyć się kwadrat liczby naturalnej?

24. Wykaż, że dla każdego n istnieje n-cyfrowy kwadrat liczby naturalnej, którego cyfry tworzą ciąg niemalejący.

25. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $\sqrt[3]{n}$ powstaje przez skreślenie trzech ostatnich cyfr liczby n?

26. Czy przez skreślenie pewnej ilości ostatnich cyfr liczby n możemy otrzymać liczbę $\sqrt{n}$?

27. Dla jakich cyfr c może się zdarzyć, że pewna liczba $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ jest postaci $\overline{cc\ldots ccc}$ i większa od 10?

28. Udowodnij, że dowolna wielokrotność liczby $\overline{\underbrace{11\ldots111}_{n}}$ ma sumę cyfr co najmniej n.

29. Dla jakich cyfr x, y, z liczba $\overline{xy234z}$ dzieli się przez 396? Znajdź wszystkie możliwości.

30. Oblicz sumę cyfr liczby $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdot 99999999 \cdot \ldots \cdot \overline{\underbrace{99\ldots999}_{2^{1024}}} \cdot \overline{\underbrace{99\ldots999}_{2^{2048}}}$.

31. Liczba naturalna b powstała przez zmianę kolejności cyfr liczby naturalnej a. Załóżmy, że $a + b = \overline{\underbrace{99\ldots999}_{n}}$. Dla jakich n jest to możliwe?

32. Suma cyfr liczby n wynosi 2010, a suma cyfr liczby $44n$ wynosi 8040. Jaka może być suma cyfr liczby $3n$?

33. Znajdź taką liczbę naturalną, że jeżeli jej cyfrę jedności równą 6 przeniesiemy na początek, to otrzymamy liczbę 4 razy większą.

34. Niech $\pi(n)$ oznacza iloczyn cyfr liczby n. Rozpoczynamy od liczby naturalnej a_1, następnie obliczamy $a_2 = a_1 + \pi(a_1)$, $a_3 = a_2 + \pi(a_2)$, $a_4 = a_3 + \pi(a_3)$, ... Czy może się zdarzyć, że otrzymany w ten sposób ciąg a_1, a_2, a_3, a_4, ... będzie nieograniczony z góry?

35. Wykaż, że wśród dowolnych 39 kolejnych liczb naturalnych można znaleźć liczbę o sumie cyfr podzielnej przez 11. A jak będzie dla 38 kolejnych liczb?

36. Uzasadnij, że istnieje n-cyfrowa liczba podzielna przez 2^n zawierająca tylko cyfry 1 i 2. A co się stanie dla innych par cyfr?

37. Uzasadnij, że istnieje n-cyfrowa liczba podzielna przez 5^n i nie zawierająca w zapisie żadnych zer.

38. Wykaż, że istnieje liczba postaci 5^n mająca co najmniej 2010 kolejnych zer. A czy można otrzymać dokładnie 2010 kolejnych zer?

39. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n, których zapis ma na ostatnich 2010 pozycjach naprzemiennie cyfry różnych parzystości.

40. Wyznacz liczbę par (x, y) liczb całkowitych spełniających równanie

$$x^4 = y^4 + 1223334444.$$

41. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba

$$\sqrt{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1}$$

jest liczbą całkowitą.

42. Udowodnić, że równanie $4m(m+1) = n(n+1)$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

43. Wykazać, że jeżeli iloczyn liczb całkowitych a, b jest liczbą parzystą, to istnieją takie liczby całkowite x, y, że zachodzi równość $a^2 + b^2 + x^2 = y^2$.

44. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c, d, przy czym liczby a i b są różne, równanie $(x + ay + c)(x + by + d) = 2$ ma co najwyżej cztery rozwiązania w liczbach całkowitych x, y.

45. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ liczba $n^n - n^2 + n - 1$ dzieli się przez $(n-1)^2$.

46. Niech $a_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Znaleźć największy wspólny dzielnik liczb a_0, a_1, ..., a_{2000}.

47. Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$. Dowieść, że suma sześcianów wszystkich liczb naturalnych względnie pierwszych z n i mniejszych od n dzieli się przez n.

48. Znaleźć wszystkie możliwe wartości, jakie może przyjąć największy wspólny dzielnik liczb $n^2 + 1$ i $(n+1)^2 + 1$ dla różnych wartości naturalnych n.

49. Rozwiązać równanie $x! + y! + z! = u!$ w liczbach całkowitych nieujemnych x, y, z, u.

50. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $S(2n^2 + 3)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

51. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych m, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $n^4 + m$ jest złożona.

52. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $19 \cdot 8^n + 17$ jest złożona.

53. Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p, q takie, że $p^q + q^p$ także jest liczbą pierwszą.

54. Dla jakich trójek cyfr (a, b, c) równość

$$\overline{\underbrace{aa\ldots aaa}_{n}\underbrace{bb\ldots bbb}_{n}} + 1 = (\overline{\underbrace{cc\ldots ccc}_{n}} + 1)^2$$

zachodzi dla wszystkich n?

55. Dla jakich trójek cyfr (a, b, c) równość

$$\overline{\underbrace{aa\ldots aaa}_{2n}} - \overline{\underbrace{bb\ldots bbb}_{n}} = (\overline{\underbrace{cc\ldots ccc}_{n}})^2$$

zachodzi dla przynajmniej dwóch liczb naturalnych n?

56. Iloma jednakowymi cyframi może kończyć się kwadrat liczby naturalnej?

57. Wykaż, że dla każdego n istnieje n-cyfrowy kwadrat liczby naturalnej, którego cyfry tworzą ciąg niemalejący.

5. PODZIELNOŚĆ LICZB CAŁKOWITYCH, CIĄG DALSZY

5.1. **Wprowadzenie.**

5.1.1. *Jednoznaczność rozkładu.* Zanim przejdziemy do głównego twierdzenie przypomnijmy znany fakt.

Lemat 5.1
Jeśli p jest liczbą pierwszą, a $a, b \in \mathbb{Z}$, to

$$p | a_1 \cdot ... \cdot a_n \quad \Longrightarrow \quad p | a_i \text{ dla pewnego } i \in \{1, ..., n\}.$$

Dowód powyższego faktu nie jest bardzo łatwy i w tym momencie go pominiemy.

Twierdzenie 5.2 (Jednoznaczność rozkładu)
Każda liczba naturalna rozkłada się jednoznacznie na iloczyn liczb pierwszych.

Dowód. W pierwszej części dowodu uzasadnimy, że każda liczba rozkłada się na iloczyn liczb pierwszych. Załóżmy przez indukcję, że dane jest n i dla każdej liczby mniejszej od n możemy rozłożyć liczbę na iloczyn liczb pierwszych (sprawdzenie kroku początkowego zostawiamy czytelnikowi). Jeśli n jest liczbą pierwszą, to koniec. Jeśli nie jest, to $n = n_1 \cdot n_2$ i obie liczby n_1 i n_2 rozkładają się na iloczyn liczb pierwszych. Z tego również n jest iloczynem liczb pierwszych.

W drugiej części pokażemy, że zachodzi jednoznaczność, tzn. zapisując

$$n = p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$$

oraz

$$n = q_1^{b_1} \cdot ... \cdot q_l^{b_l}$$

dla liczb pierwszych p_i, q_i oraz liczb naturalnych l, k, a_i, b_i te zapisy różnią się jedynie kolejnością mnożenia. Znów skorzystamy z indukcji. Skoro $p_1 | n$, to $p_1 = q_j$ dla pewnego j (lemat 5.1). Liczba n/p_1 jest mniejsza od n i dla niej zachodzi jednoznaczność rozkładu. Z tego znioskujemy, że dla n również. $\square$

Jako wniosek wiemy, że jeśli rozłożymy liczbę jako iloczyn liczb pierwszych do pewnych potęg (np. $2^5 \cdot 3^2 \cdot 13$), to podzielność przez tę liczbę oznacza dokładnie podzielność przez poszczególne liczby pierwsze w odpowiednich potęgach. W naszym przykładzie:

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 13 | n \quad \Longleftrightarrow \quad 2^5 | n \ i \ 3^2 | n \ i \ 13 | n.$$

5.1.2. *Algorytm Euklidesa.* Algorytm Euklidesa pozwala szybko znajdować największy wspólny dzielnik liczb $\mathrm{NWD}(a, b)$ (największy wspólny dzielnik).

Mając dane dwie liczby a i b dzielimy z resztą większą przez mniejszą. Następnie wyjściową parę liczb zastępujemy tą mniejszą (b) i resztą z dzielenia r (która jest mniejsza od b). Tak dostajemy parę b, r, z którą postępujemy podobnie, aż dostaniemy 0 jako resztę. Wtedy druga z tych liczb jest NWD wszystkich tych par.

Uzasadnijmy teraz, że $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(b, r)$. Z algorytmu dzielenia z resztą mamy

$$a = b \cdot q + r.$$

Ponieważ liczba $\mathrm{NWD}(a, b)$ jest dzielnikiem a oraz b, to z powyższej równości $\mathrm{NWD}(a, b) | r$, więc $\mathrm{NWD}(a, b) | \mathrm{NWD}(b, r)$. Odwrotnie, ponieważ $\mathrm{NWD}(b, r)$ jest dzielnikiem b i r, to z powyższej równości $\mathrm{NWD}(b, r)$ dzieli również a. Zatem $\mathrm{NWD}(b, r) | \mathrm{NWD}(a, b)$, więc $\mathrm{NWD}(b, r) = \mathrm{NWD}(a, b)$.

Twierdzenie 5.3 (Uogólniony algorytm Euklidesa)
Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Wtedy istnieją $k, n \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$a \cdot k + b \cdot n = \mathrm{NWD}(a, b).$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy udowodnić twierdzenie dla liczb względnie pierwszych a, b (uzasadnij dlaczego!). Z agorytmu Euklidesa mamy

$$a = q_1 \cdot b + r_1$$

$$b = q_2 \cdot r_1 + r_2$$

$$...$$

$$r_{k-2} = q_{k-1} \cdot r_{k-1} + r_k$$

$$r_{k-1} = q_k \cdot r_k + 1$$

Teraz możemy zauważyć, że z powyższych równań można wyznaczyć wszystkie r_j jako pewne sumy typu $x \cdot a + y \cdot b$ dla $x, y \in \mathbb{Z}$. Używając tego w ostatnim równaniu dostajemy tezę. □

5.1.3. *Małe twierdzenie Fermata.*

Twierdzenie 5.4 (Małe twierdzenie Fermata)
Jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $a \in \mathbb{Z}$ jest takie, że $p \nmid a$, to

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dowód. Pozważmy reszty z dzienia przez p (z wyjątkiem zera):

$$1, 2, ..., p-1.$$

Wszystkie te reszty mnożymy przez liczbę a i sprawdzamy resztę mod p:

$$a \pmod{p}, 2a \pmod{p}, ..., (p-1)a \pmod{p}.$$

Zauważymy teraz, że powyższe $p-1$ reszt to znów wszystkie reszty z dzielenia przez p (poza zerem); być może w innej kolejności. Załóżmy więc teraz, że $j \cdot a$ oraz $k \cdot a$ dają tę samą resztę z dzielenia przez p. Wtedy $p|(j-k) \cdot a$, ale $p \nmid a$ oraz $p \nmid (j-k)$ (bo j i k są różne i mniejsze od p). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że żadne dwie z tych reszt nie są takie same. Oczywiście żadna nie może być zerem, więc to te same reszty. Mnożąc te dwa ciągi mamy

$$(p-1)! \equiv a^{p-1}(p-1)! \pmod{p}.$$

Ponieważ $(p-1)!$ jest względnie pierwsze z p, to możemy skrócić kongruencję i mamy

$$1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}.$$

□

5.1.4. *Twierdzenie Eulera.* Pewnym uogólnieniem twierdzenia Fermata jest twierdzenie Eulera, w którym p nie musi być liczbą pierwszą. Aby sformułować twierdzenie Eulera wprowadzamy funkcję $\phi(n)$, która dla danej liczby naturalnej n podaje liczbę liczb względnie pierwszych z n ze zbioru $\{1, ..., n-1\}$. Np. $\phi(p) = p - 1$ dla liczby pierwszej p oraz $\phi(12) = 4$ (bo względnie pierwsze z liczbą 12 są: 1,5,7,11).

Twierdzenie 5.5 (Twierdzenie Eulera)
Jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \in \mathbb{Z}$ są takie, że $\mathrm{NWD}(a, n) = 1$, to

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Dowód twierdzenia Eulera można przeprowadzić podobnie do dowodu twierdzenia Fermata i zostawiamy to jako ćwiczenie.

5.1.5. *Twierdzenie Wilsona.*

Twierdzenie 5.6 (Twierdzenie Wilsona)
Jeśli p jest liczbą pierwszą, to

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

5.1.6. *Chińskie twierdzenie o resztach.*

Twierdzenie 5.7
Jeśli mamy dane parami względnie pierwsze liczby $d_1, d_2, ..., d_k$ oraz dowolne całkowite $r_1, r_2, ..., r_k$, to układ:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \ (mod\ d_1) \\ x \equiv r_2 \ (mod\ d_2) \\ \qquad ... \\ x \equiv r_k \ (mod\ d_k) \end{cases}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wszystkie one są postaci

$$x = u + D \cdot n,$$

gdzie $D = d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_k$, $u \in \{0, 1, 2, ..., D-1\}$, a n jest dowolną liczbą całkowitą.

5.2. **Lista zadań.**

---

1. Przetestuj algorytm dla par liczb: $(197, 32)$, $(240, 36)$, $(15411, 110)$.
2. Dlaczego w algorytmie Euklidesa dochodzimy zawsze do pary $(\mathrm{NWD}(a, b), 0)$?
3. Czy liczbę 1100 można przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb, których największy wspólny dzielnik wynosi 11?
4. Iloczyn dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 6 jest równy 144. Znajdź te liczby.
5. Oblicz: 3^{31} $(mod\ 7)$, 29^{25} $(mod\ 11)$, 128^{129} $(mod\ 17)$.

---

6. Jaki dzień tygodnia będzie za $10^{10^{100}}$ dni?
7. Dla $p = 2, 3, 5, 7, 11$ uzasadnij, że jeśli liczba pierwsza p dzieli iloczyn $a \cdot b$, to $p|a$ lub $p|b$.

8. Znajdź liczby całkowite k, l, m, dla których

$$6^k \cdot 10^l \cdot 15^m = 9^{2000}$$

9. Znajdź wszystkie liczby całkowite x takie, że $x^{86} \equiv 6 \ (mod\ 29)$.

10. Oblicz resztę z dzielenia liczby $2^{44} - 3^{85} + 5^{211}$ przez 43.

11. Wykazac, ze dla kazdego $k \in \mathbb{N}$ liczba $k^6 - k^2$ jest podzielna przez 60.

12. Niech $k = 2008^2 + 2^{2008}$. Jaka jest cyfra jedności liczby $k^2 + 2^k$?

13. Ile dzielników naturalnych mają liczby: 78, 128, 12^{10}, $2^5 \cdot 3^2 \cdot 13$?

14. Pewna liczba n spełnia $n^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5$. Znajdź n sprawdzając jaką resztę raje n przy dzielniu przez 3 i 5.

15. Pokaż, że $x^p \equiv x \ (mod\ p)$ dla $x \in \mathbb{Z}$ i liczby pierwszej p.

16. Udowodnij poprzednie zadananie (Małe Tw. Fermata) przez indukcję względem p. *Wskazówka:* $p|\binom{p}{k}$ dla $k = 1, 2, ..., p-1$.

17. Jakie liczby x spełniają układ kongruencji:

(a) $x \equiv 1 \ (mod\ 2), \quad x \equiv 2 \ (mod\ 3)$,
(b) $x \equiv 1 \ (mod\ 2), \quad x \equiv 4 \ (mod\ 8)$,
(c) $x \equiv 5 \ (mod\ 6), \quad x \equiv 4 \ (mod\ 9)$,
(d) $x \equiv 1 \ (mod\ 2), \quad x \equiv 2 \ (mod\ 3), \quad x \equiv 3 \ (mod\ 5)$,
(e) $x \equiv 3 \ (mod\ 7), \quad x \equiv 5 \ (mod\ 11)$,
(f) $x \equiv 5 \ (mod\ 9), \quad x \equiv 3 \ (mod\ 8)$.

18. Udowodnij, że $x \equiv 5 \ (mod\ 6) \ \Leftrightarrow \ x \equiv 1 \ (mod\ 2) \ i \ x \equiv 2 \ (mod\ 3)$.

19. Jakim (prostszym) kongruencjom jest równoważne przystawanie:

(a) $x \equiv 17 \ (mod\ 30)$,
(b) $x \equiv 31 \ (mod\ 70)$,
(c) $x \equiv 13 \ (mod\ 20)$,
(d) $x \equiv 7 \ (mod\ 8)$.

20. Znajdź jakiekolwiek, całkowite rozwiązanie (x, y) równania:

(a) $7x + 2y = 1$,
(b) $5x + 18y = 1$,
(c) $22x + 18y = 1$,
(d) $11x + 17y = 1$,
(e) $35x + 84y = 1$,
(f) $33x + 47y = 1$.

---

21. Niech $p \neq 2$ bedzie liczbą pierwszą. Dowieść, że liczba $1^p + 2^p + 3^p + ... + (p-2)^p + (p-1)^p$ jest podzielna przez p.

22. Niech p bedzie nieparzystą liczbą pierwszą. Obliczyć resztę z dzielenia liczby $1^p - 2^p + 3^p - ... + (p-2)^p - (p-1)^p$ przez p.

23. Niech p bedzie liczba pierwsza i niech $n = p^2 - 3p + 3$. Wykazac, ze liczba $2^n - n + 1$ jest podzielna przez p.

24. Niech $f(x) = x^{x^{x^x}}$. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby $f(17) + f(18) + f(19) + f(20)$.

25. Niech p bedzie nieparzysta liczba pierwsza i niech $k > 1$ bedzie dzielnikiem pierwszym liczby $p^2 - 2$. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita m, ze liczba $m - 14$ jest podzielna przez p oraz liczba $m - 2004$ jest podzielna przez k.

26. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $n^{n^3} - n^n$ nie jest podzielna przez 5.

27. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić podzielność liczby $n^{n^7} - n^n$ przez 43.

6. ZASADA SZUFLADKOWA

6.1. **Lista zadań.**

1. Pokaż, że wśród dowolnych 11 liczb całkowitych są dwie, których różnica dzieli się przez 10.

2. Wykaż, że z danych $n+1$ liczb całkowitych znajdą się dwie, których różnica jest podzielna przez n.

3. Udowodnij, że w Warszawie są dwie osoby, które mają tą samą liczbę włosów (przyjmujemy 500 000 jako ograniczenie górne na liczbę włosów u człowieka).

4. Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 7 krawędzi sześcianu istnieją co najmniej 3 wzajemnie równoległe.

5. W klasie jest 40 uczniów. Czy jest wśród nich czwórka uczniów urodzonych w tym samym miesiącu?

6. Na odcinku $< 0, 1 >$ leży 9 różnych punktów. Wykaż, że można wybrać takie dwa z nich, że ich odległość jest niewiększa niż $\frac{1}{8}$.

---

7. Uzasadnij, że wśród 37 liczb niepodzielnych przez 7 zawsze można wybrać 7 liczb, których suma dzieli się przez 7.

8. W kwadracie o boku 2 leży 5 punktów. Uzasadnij, że znajdziemy takie dwa, że ich odległość jest mniejsza lub równa $\sqrt{2}$.

9. W kwadracie o boku 4 leży 17 punktów. Uzasadnij, że znajdziemy takie dwa, że ich odległość jest mniejsza lub równa $\sqrt{2}$.

10. Udowodnij, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku 4 umieścimy 17 punktów, to znajdą się dwa, które są w odległości niewiększej niż 1.

11. W trójkącie równobocznymo boku długości 12 umieszczono 300 punktów. Pokaż, że pewne 3 z nich tworzą trojkąt o obwodzie niewiększym niż 3.

12. Spośród liczb $1, 2, ..., 9$ wybrano sześć. Uzasadnij, że spośród wybranych liczb są dwie, których suma jest równa 10.

13. Danych jest 7 liczb całkowitych. Wykaż, że wśród nich zawsze będą takie dwie, których różnica kwadratów jest podzielna przez 10.

14. Wykaż, że w dowolnej grupie osób zawsze są dwie, które mają tę samą liczbę znajomych (zakładamy, że jeśli jedna osoba zna drugą, to jest też odwrotnie).

15. Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów kratowych. Udowodnij, że można wybrać dwa z nich takie, że środek odcinka je łączącego też jest punktem kratowym.

16. Udowodnij, że w dowolnym wielościanie
(a) pewne dwa wierzchołki,
(b) pewne dwie ściany
mają tyle samo krawędzi.

17. Danych jest 6 niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie. Wszystkie łączymy odcinkami koloru czerwonego lub niebieskiego. Udowodnij, że zawsze znajdzie się trójkąt jednego koloru.

18. Danych jest 66 niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie. Wszystkie łączymy odcinkami koloru czerwonego, żółtego, zielonego lub niebieskiego. Udowodnij, że zawsze znajdzie się trójkąt jednego koloru.

19. Na nieskończonej szachownicy jest 1999 skoczków szachowych. Udowodnij, że można wybrać 1000 z nich takich, że żadne dwa się nie biją.

20. Wykaż, że wśród dowolnie wypisanych 7 (n) liczb całkowitych zawsze można wskazać pewną liczbę kolejnych, których suma jest podzielna przez 7 (n).

21. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, że w jej zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 0 i 1.

22. Uzasadnij, że wśród liczb $1, 11, 111, \ldots$ jest liczba podzielna przez 2009.

23. Udowodnij, że z dowolnego $10-$elementowego zbioru złożonego z liczb dwucyfrowych można wybrać dwa rożne niepuste podzbiory, których sumy elementów będą równe.

24. Danych jest 2008 liczb całkowitych. Wykaż, że zawsze można spośród nich wybrać trzy liczby a, b, c takie, że $a(b-c)$ jest podzielne przez 2008.

25. Udowodnij, że dla dowolnych $2^{n-1}+1$ podzbiorów zbioru $n-$elementowego zawsze znajdą się dwa zbiory rozłączne.

---

26. Mamy 20 worków i 20 kotów. Dla każdego worka i każdego kota ustalamy cenę (worek kosztuje $2,10-4$ zł; kot $10-12$ zł; ceny są wielokrotnościami 1 gr). Czy możemy tak ustalić ceny (różne dla różnych worków i kotów), żeby każdy zestaw kot-worek był w innej cenie?

27. Wykaż, że w ciągu Fibbonacciego można znaleźć liczbę podzielną przez 2020.

28. W ciągu $0, 0, 1, 2, 3, 6, 12, 23, 44, 85, \ldots$ każdy wyraz (począwszy od piątego) jest sumą czterech poprzednich. Wykazać, że pewne dwie kolejne liczby w tym ciągu są podzielne przez 14.

29. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że istnieją liczby całkowite x, y takie, że $p | x^2+y^2+1$. [7]

30. Danych jest 11 różnych liczb całkowitych. Udowodnić, że można z nich wybrać 6 liczb, których suma jest podzielna przez 6. [8]

31. W sześciu kratkach tabeli 4×4 narysowano gwiazdki. Udowodnić, że można wykreślić dwa wiersze i dwie kolumny tej tabeli w taki sposób, aby w niewykreślonych polach nie pozostały żadne gwiazdki.

32. W prostokącie o wymiarach 20×25 narysowano 120 kwadratów o boku długości 1. Wykazać, że można w tym prostokącie narysować koło o średnicy 1 i nie przecinające żadnego z kwadratów.

33. Każdy punkt okręgu pomalowano jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednakowego koloru sa wierzchołkami trójkąta równoramiennego. [9]

34. W kole o promieniu 10 wybrano 372 punkty. Wykaż, że istnieje pierścień o promieniach 2 i 3, który zawiera co najmniej 12 z tych punktów.

---

[7] *Wskazówka:* Jakie reszty dają liczby $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$? A jakie liczby $-1-0^2, -1-1^2, \ldots, -1-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$?

[8] *Wskazówka:* Z pięciu liczb można wybrać 3, których suma dzieli się przez 3.

[9] *Wskazówka:* Rozważ 13-kąt wpisany w okrąg.

35. Spośród liczb $1, 2, ..., 2020$ $(1, 2, ..., 2n)$ liczb wybrano 1011 $(n+1)$ sztuk. Dowieść, że wśród wybranych są dwie, z których jedna dzieli się przez drugą. [10]

36. Ze zbioru $\{1, 2, ..., 100\}$ wybrano 26 liczb. Pokazać, że spośród nich można wybrać niepusty podzbiór, którego iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

[10] *Wskazówka:* Liczby zapisujemy jako $n \cdot 2^k$ (n nieparzyste). Ile jest możliwości na n?

7.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale zajmiemy się problemem szacowania wielkości matematycznych. Naszym celem jest nabranie umiejętności spojrzenia na wyrażenia matematyczne w sposób przybliżony - gdy nie interesuje nas konkretna wartość wyrażenia, ale pewne ogólne własności (np. ograniczenie górne/dolne przez jakąś liczbę lub prostsze wyrażenie). W tym rozdziale nie podajemy żadnej teorii. Zamiast tego skupimy się na przykładach, które sprowadzają się jedynie do przekształceń algebraicznych i elementarnych nierówności.

7.1.1. *Przykłady.*

Przykład 7.1

Oszacuj liczbę 1000! od góry i dołu przez potęgi dziesiątki.

Rozwiązanie. W iloczynie mamy 9 liczb jednocyfrowych, 90 dwucyfrowych, 900 trzycyfrowych oraz liczbę 1000. Oczywiście każda liczba x, która ma n cyfr spełnia $10^{n-1} \leq x < 10^n$. Zatem

$$1000! \geq 1^9 \cdot 10^{90} \cdot 100^{900} \cdot 1000 = 10^{90+1800+3} = 10^{1893},$$
$$1000! \leq 10^9 \cdot 100^{90} \cdot 1000^{900} \cdot 1000 = 10^{9+180+2700+3} = 10^{2892},$$

z czego wynika, że liczba 1000! ma co najmniej 1894 cyfry oraz co najwyżej 2893 cyfry. □

Przykład 7.2

Wskaż n_0 takie, że dla liczby $n \geq n_0$ prawdziwa jest nierówność

$$n^4 \leq 2^n. \tag{7.1}$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy ZIM. Zacznijmy nietypowo od drugiego kroku indukcyjnego:

- **Z2.** zakładamy, że dla pewnego k zachodzi $k^4 \leq 2^k$. Wtedy:
$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2k^4 \geq^{(?)} (k+1)^4,$$
przy czym nierówność (?) zachodzi dokładnie, gdy $2 \geq \left(\frac{k+1}{k}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^4$. Zauważmy teraz, że dla $k = 6$ nierówność zachodzi, bo $(7/6)^4 \leq 2$ (sprawdź). Dla większych k prawa strona jest jeszcze mniejsza, czyli pokazaliśmy, że krok indukcyjny zachodzi od $k = 6$.
- **Z1.** niestety nierówność (7.1) nie jest prawdziwa dla $n = 6$, ale łatwo ją sprawdzić n.p. dla $n = 20$, bo $(L) = 20^4 = 160000$ i $(P) = 2^{20} = \left(2^{10}\right)^2 \geq 1000^2$.

Na mocy zmodyfikowanej ZIM nierówność jest prawdziwa dla $n \geq 20$. □

Przykład 7.3

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq D\ .$$

Rozwiązanie. Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq \frac{4n^4 + 3n^4 - 0}{5n^4 - 4n^4 + 0} = \frac{7n^4}{n^4} = 7\ .$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \geq \frac{4n^4 + 0 - 2n^4}{5n^4 - 0 + 2n^4} = \frac{2n^4}{7n^4} = \frac{2}{7}\ .$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 2//7$ oraz $D = 7$. □

Przykład 7.4

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq D\ .$$

Rozwiązanie. Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq \frac{4n^4 - 0 + 2n^4}{5n^4 + 0 - 2n^4} = \frac{6n^4}{3n^4} = 2\ .$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \geq \frac{4n^4 - 3n^4 + 0}{5n^4 + 4n^4 - 0} = \frac{n^4}{9n^4} = \frac{1}{9}\ .$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 1//9$ oraz $D = 2$. □

Przykład 7.5

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności:

$$C \cdot n^k \leq \frac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2} \leq D \cdot n^k.$$

Rozwiązanie. Domyślamy się, że $k = 5,5$ (w liczniku wyrażenia najważniejszym składnikiem jest n^6, a w mianowniku $\sqrt{n}$). Szacujemy z góry:

$$\frac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2} \leq \frac{n^6 + 2n^6 + n^6}{\sqrt{n}} = 4n^{5,5}$$

I z dołu:

$$\frac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2} \geq \frac{n^6}{\sqrt{n} + 2\sqrt{n}} = \frac{1}{3}n^{5,5}.$$

□

7.2. **Lista zadań.**

---

1. Oszacuj przez potęgi dziesiątki następujące liczby:

$$2^{1000}, \quad 100!.$$

2. Dla $a, b \in \mathbf{R}$ oraz $c > 0$ udowodnij nierówności:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad a^3 + 2 \geq 2a\sqrt{a}, \quad 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2.$$

3. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq$ .... zachodzi nierówność

$$n^2 \leq 2^n\ .$$

W miejsce kropek wstaw liczbę, dla której udaje się łatwo zredagować dowód.

4. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C < W(n) < D$.

(a) $W(n) = \dfrac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2}$

(b) $W(n) = \dfrac{\sqrt{n+7} + 3}{\sqrt{n+3} + 7}$

(c) $W(n) = \sqrt[3]{n^3+n^2} - n$

5. Oszacuj od góry i dołu wyrażenie

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \ldots + \sqrt{9n}\ .$$

6. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq$ .... zachodzi nierówność

$$n^8 \leq 2^n\ .$$

Zastanowić się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

7. Oszacuj podane poniżej wyrażenia od góry i od dołu ($n \in \mathbf{N}$) przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim (o ile nie podano inaczej).

(a)

$$\frac{n^4+2n^3+n+7}{4n^4+n^2+15},$$

(b)

$$\frac{n\sqrt{n+4}+5}{\sqrt{n^3+4}+1},$$

(c)

$$\frac{2^n+10n^2}{2^n+n^4},$$

(d)

$$\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}+\ldots+\sqrt{2n^2}}{2n+5},$$

(e)

$$\frac{n!}{n!+10^n},$$

(f)

$$\frac{n^6+5n+4}{2n^3-n^2+7},$$

(g)

$$\frac{x}{x^2+1} \qquad \text{(tylko od góry, } x \in \mathbf{R}\text{)},$$

(h)

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

(i)

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}, \qquad \text{(szacowanie postaci } g \pm C/n\text{)},$$

8. Która z liczb jest większa:

$$2^{1000!} \text{ czy } 999^{999!}?$$

$$26^{99} \text{ czy } 10^{151}?$$

$$\prod_{i=2}^{2009} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\sqrt[j]{j} - \sqrt[i]{i} \right) \text{ czy } 10^{-1000000}?$$

9. Uprość wyrażenie[11]

$$\left(3^{2^n} - 2^{2^m}\right) \cdot \prod_{i=0}^{37} \left(3^{2^{n+i}} + 2^{2^{m+i}}\right) .$$

10. Niech $a = \sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{256} \qquad \text{czy} \qquad 256^a \ ?$$

11. Uporządkuj następujące liczby w kolejności rosnącej:

$$a = \left(5 - \sqrt{37}\right)^{2008}, \qquad b = \left(6 - \sqrt{37}\right)^{2009}, \qquad c = \left(7 - \sqrt{73}\right)^{2011}. \qquad d = \left(9 - \sqrt{73}\right)^{2013}.$$

12. Która z liczb jest większa $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

13. Wskaż taką liczbę naturalną n, że

$$n^{1000000} + 1 < 2^n .$$

14. Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnij nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

(a) $L = 3972^{257}$

(b) $L = 700!$

15. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$1 - \frac{C}{n} < W(n) < 1 + \frac{C}{n} .$$

(a) $W(n) = \dfrac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 7n + 2}$

(b) $W(n) = \dfrac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n + 1}$

16. W każdym z ośmiu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0,\ 1,\ 2,\ 5\ ,10,\ 100,\ 10^5,\ 10^{10},\ 10^{20},\ 10^{50},\ 10^{100},\ 10^{200},\ 10^{500},\ 10^{1000},\ 10^{2000},$ $10^{5000},\ 10^{10000},\ 10^{20000},\ 10^{50000},\ 10^{100000},\ 10^{200000},\ 10^{500000},\ 10^{1000000}$ na kolejnych miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

[11] Uwaga: zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

$$\ldots < 10000! < \ldots,$$
$$\ldots < 2^{10000} < \ldots,$$
$$\ldots < \binom{10000}{5} < \ldots,$$
$$\ldots < 30^{10000} < \ldots,$$

$$\ldots < 2^{2^{10}} < \ldots,$$
$$\ldots < 665! < \ldots,$$
$$\ldots < 4444^{4444} < \ldots,$$
$$\ldots < 7777^{7777} < \ldots,$$

---

17. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq$ .... zachodzi nierówność
$$n^{32} \leq 2^n\ .$$
W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód. Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

18. Wskaż liczbę naturalną $n > 1$ spełniającą nierówność
$$n^{1000} < 2^n\ .$$

19. Udowodnij nierówność
$$n^{2^{27}} \leq 2^n$$
dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n > 1$. (Należy wybrać jedną liczbę n spełniającą nierówność i dla tej liczby udowodnić nierówność.)

8. WIĘCEJ NIERÓWNOŚCI

8.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale sformułujemy i udowodnimy kilka klasycznych nierówności. Niech $a_1, a_2, \ldots$ będą dodatnimi liczbami.

Definicja 8.1
Średnią arytmetyczną liczb $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Średnią geometryczną liczb $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Średnią harmoniczną liczb $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Średnią kwadratową liczb $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$K_n = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{1/2}.$$

Łatwo zauważyć, że średnia jest zawsze liczbą pomiędzy największą a najmniejszą z "uśrednianych" liczb[12]

Powyższe oznaczenia (A_n, G_n, H_n, K_n) będą używane poniżej bez wracania do definicji. Np. A_7 oznacza średnią arytmetyczną liczb $a_1, \ldots, a_7$ oraz G_{n-1} średnią geometryczną liczb $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Twierdzenie 8.2 (Nierówność Cauchy'ego o średnich)
Pomiędzy średnimi zachodzą następujące nierówności: $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$, tzn.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{1/2}.$$

Dodatkowo: jeśli w powyższym zachodzi jakakolwiek równość, to $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dowód. Mamy do udowodnienia trzy nierówności. Pierwsza z nich wynika z drugiej (zob. zadanie 18).

Dowód nierówności $G_n \leq A_n$ Zauważmy, że udowodniliśmy już tę nierówność w problemie 30 z rozdziału o indukcji. Tutaj podamy inny dowód indukcyjny. Oczywiście dla $n = 1$ nierówność jest równością. Załóżmy, że nierówność zachodzi dla $n-1$, tzn. $G_{n-1} \leq A_{n-1}$ oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$. Rozważmy teraz układ n liczb: $a_1, \ldots, a_n$. Niech a_i będzie najmniejszą z nich oraz a_j - największą. Gdyby $a_i = a_j$, to wszystkie były by równe i nie ma co robić. Załóżmy zatem, że $r := a_j - a_i > 0$. Wykonamy teraz następującą operację: liczby a_i i a_j "zbliżamy" do siebie zastępując przez $a_i + \varepsilon$ i $a_j - \varepsilon$ dla $\varepsilon < r/2$. Zauważmy, że ta operacja nie zmienia średniej arytmetycznej A_n (sprawdź!) natomiast zwiększa średnią geometryczną G_n, ponieważ

$$(a_i + \varepsilon)(a_j - \varepsilon) = a_i \cdot a_j + \varepsilon(a_j - a_i) - \varepsilon^2 = a_i \cdot a_j + \varepsilon(a_j - a_i - \varepsilon) > a_i \cdot a_j.$$

[12] Tak naprawdę, to ta własność jest definicją "średniej".

Oczywiście $a_i < A_n < a_j$, więc poprzez "zbliżanie" możemy zamienić parę a_i, a_j tak, aby jedna z nich wynosiła A_n (tutaj A_n jest średnią arytmetyczną zarówno przed i po zamianie). Mamy zatem udowodnić nierówność:

$$A_n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot A_n}$$

Która jest równoważna nierówności:

$$A_n^{1-\frac{1}{n}} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}},$$

a ta nierówność po podniesieniu do potęgi $n/(n-1)$ staje się dokładnie nierównością $G_{n-1} \leq A_{n-1}$, która jest prawdziwa z założenia indukcyjnego. □

8.1.1. *Przykłady.*

Przykład 8.3
Dla $x > 0$ zachodzi

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

przy czym równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy $x = 1$.

Dowód. Dzieląc obie strony przez 2 po lewej stronie otrzymujemy średnią arytmetyczną liczb x i $1/x$. Średnia geometryczna tych liczb jest równa 1. Równość w powyższych średnich zachodzi, gdy $x = 1/x$, czyli $x = 1$. □

Przykład 8.4
Udowodnij nierówność

$$\sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{b^2ca} + \sqrt[4]{c^2ab} \leq a + b + c.$$

Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie. Wyrażenie $\sqrt[4]{a^2bc}$ jest średnią geometryczną liczb a, a, b, c zatem jest nie większa od $(a + a + b + c)/4$. Postępując podobnie dla pozostałych pierwiastków mamy

$$\sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{b^2ca} + \sqrt[4]{c^2ab} \leq \frac{(a + a + b + c) + (b + b + c + a) + (c + c + a + b)}{4} = a + b + c.$$

□

8.2. **Lista zadań.** Na tej liście zadań n oznacza liczbę naturalną, a pozostałe występujące liczby są rzeczywiste i dodatnie, chyba że jest powiedziane inaczej. Polecenie jest jedno: "Udowodnij nierówność".

1.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

2.

$$2 \cdot (a^2 + b^2) \geq (a + b)^2,$$

3.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b},$$

4.
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc,$$

5.
$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

6.
$$a^6 + b^9 \geq 12a^2b^3 - 64$$

7.
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$$

8.
$$\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{bcd} + \sqrt[3]{cda} + \sqrt[3]{dab} \leq a+b+c+d$$

9. dla $0 < a_i < 1$ oraz $S = a_1 + \ldots + a_n$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_i} \geq \frac{nS}{n-S}$$

10.
$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

11.
$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}, \text{ o ile } a+b+c=1$$

12.
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}, \text{ gdzie } S = a_1 + \ldots + a_n$$

13.
$$2(a^3+b^3)^2 \geq (a^2+b^2)^3$$

14.
$$\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{bc} + \sqrt[n]{ca} \leq \sqrt[n]{3^{n-2}} \text{ dla } a,b,c \text{ takich, że } a+b+c=1$$

15.
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^m > n^{m+1}$$

16. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz = 1$ Udowodnij, że $(x+2y)(y+2z)(z+2x) \geq 27$.

17. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $x+y+z=1$. Wykaż, że:
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

18. Z nierówności $G_n \leq A_n$ wywnioskuj nierówność $H_n \leq A_n$. Użyj podstawienia takiego, by średnia arytmetyczna zamieniła się w harmoniczną.

19.
$$a+b+c \leq 9 \text{ dla } a,b,c \text{ takich, że } a^3+b^3+c^3 = 81$$

20.

$$a^3+b^3+c^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ dla } a,b,c \text{ takich, że } a^2+b^2+c^2=8$$

21.

$$\frac{1}{a+ab+abc}+\frac{1}{b+bc+bca}+\frac{1}{c+ca+cab} \leq \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{abc}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

22. Niech a,b,c będą długościami boków trójkąta. Boki te spełniają równość $bc+ac+ab=27$. Wykaż, że $9<a+b+c<11$

23. Dowiedź, że jeśli a,b,c,d są liczbami dodatnimi, to zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

24. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1,...x_n$ ma miejsce:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2i}}{2^n}.$$

25. Liczby rzeczywiste dodatniea,b,c spełniają warunek $ab+bc+ca=3$. Dowiedz, że:

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq 9.$$

26. Suma liczb dodatnich a,b,c równa jest 1. Udowodnij,że:

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq (a+b+c)^2.$$

27. Znajdź wszystkie takie liczby naturalne n, że nierówność

$$x_1x_2+x_2x_3+..+x_{n-1}x_n \leq \frac{n-1}{n}(x_1^2+...+x_n^2)$$

jest prawdziwa.

28. Dowiedź, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a,b,c i liczby całkowitej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{a+c}+\frac{c^{n+1}}{b+a} \geq \left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{b+a}\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

29. Pokaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych zachodzi:

$$(a+b+c+d)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab.$$

9. LICZNOŚĆ ZBIORU I NIESKOŃCZONOŚCI

9.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale porozmawiamy o magicznym pojęciu nieskończoności, które fascynowało ludzkość od zawsze. Wszystko wydaje się prostsze, jeśli pracujemy ze zbiorami, które można policzyć i mają skończoną liczbę elementów. Jednak szybko potrzebujemy zbiorów nieskończonych: liczby całkowite, rzeczywiste, itd. Mogłoby się zdawać, że sprawa jest prosta - albo zbiór jest skończony, albo nieskończony. Jednak sprawa zbiorów nieskończonych jest dużo ciekawsza.

Przypomnijmy jednak najpierw definicję pojęcia *funkcja*. Mamy dane dwa zbiory: dziedzinę A i przeciwdziedzinę B. Funkcja $f : A \to B$ przyporządkowuje każdemu elementowi zbioru A jakiś element zbioru B. Jest jednak możliwe, że niektóre elementy zbioru B nie będą przyporządkowane żadnemu elementowi zbioru A. Ponadto, niektóre elementy zbioru B mogą być przypisane wielu elementom zbioru A. Czasem jednak chcemy, żeby funkcja była "sprawiedliwa" tzn. żeby nie zachodziły dwa zjawiska powyżej. Służą temu dwa dodatkowe pojęcia.

Definicja 9.1
Mówimy, że funkcja jest *różnowartościowa* (lub jest 1-1, lub jest *injekcją*), jeśli

- dla dowolnych $a, a' \in A$, $a \neq a'$, zachodzi $f(a) \neq f(a')$

lub, równoważnie,

- dla dowolnych $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implikuje $a = a'$.

Definicja 9.2
Mówimy, że funkcja jest "na" (lub jest *surjekcją*), jeśli

- dla każdego $b \in B$ istnieje $a \in A$, takie że $f(a) = b$

lub, równoważnie,

- każdy element zbioru B jest obrazem pewnego elementu ze zbioru A.

Za pomocą powyższych definicji możemy określić, co to znaczy, że dwa zbiory są *równoliczne* (lub są *tej samej mocy*)

Definicja 9.3
Dla danych zbiorów A i B mówimy, że są *równoliczne*, jeśli istnieje funkcja $f : A \to B$, która jest jednocześnie różnowartościowa i "na" (inaczej: jest bijekcją). Takie zdarzenie oznaczamy $|A| = |B|$ (lub $\overline{A} = \overline{B}$ lub $A \sim B$).

Nie jest trudno sprawdzić, że jeśli $|A| = |B|$, to $|B| = |A|$ (co nie wynika wprost z definicji, zob. zad. 8. Podobnie, jeśli $|A| = |B|$ oraz $|B| = |C|$, to mamy $|A| = |C|$ (zob. zad. 9).

W zadaniach przekonamy się, że liczb naturalnych jest tyle samo co całkowitych (ale również tyle samo co np. pierwszych, wymiernych (!), itd.).

Podobnie liczb rzeczywistych jest tyle samo co punktów na paraboli, ale też tyle samo co punktów w na odcinku lub okręgu. Co więcej - punktów na prostej jest tyle samo co na płaszczyźnie!

Czy wobec tego liczb całkowitych może być tyle samo co rzeczywistych? Zacznijmy jednak od tego jak zdefiniować, że pewien zbiór jest "mniejszy lub równy".

Definicja 9.4
Dla danych zbiorów A i B mówimy, że $|A| \leq |B|$, jeśli istnieje funkcja $f : A \to B$, która jest różnowartościowa.

Jak zatem powiedzieć, że gdzieś jest mniej punktów? Otóż $|A| < |B|$ jest równoważne temu, że $|A| \leq |B|$ oraz nie istnieje bijekcja pomiędzy $|A|$ i $|B|$ (tzn. $|A| \neq |B|$). Trzeba przyznać, że ta definicja jest dość złożona, bo przecież o ile można wskazać funkcję, która pokaże, że $|A| \leq |B|$, to jak uzasadnić, że nie istnieje (żadna!) funkcja, która jest bijekcją? Zobaczymy poniżej kilka przykładów, m.in. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Zauważmy również, że czasem jest łatwiej pokazać, że $|A| \leq |B|$ oraz $|B| \leq |A|$, ale nie tak łatwo jest wskazać dokładną bijekcję między zbiorami A i B. W takich sytuacjach możemy wykorzystać (niełatwe!) twierdzenie poniżej.

Twierdzenie 9.5 (Cantor-Bernstein)
Jeśli $|A| \leq |B|$ oraz $|B| \leq |A|$, to $|A| = |B|$.

Na koniec dodajmy jeszcze definicję tzw. *zbioru potęgowego* (będzie nam on potrzebny w przykładach). Jeśli A jest pewnym zbiorem, to $\mathbf{P}(A)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A. Np. dla $A = a, b, c$ mamy

$$\mathbf{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Spróbuj sobie wyobrazić zbiór $\mathbf{P}(\mathbb{N})$.

Ńa koniec: oznaczenie A^B oznacza zbiór wszystkich funkcji $f : B \to A$. Wyobraź sobie kilka przykładów.

9.2. **Lista zadań.**

1. Które z następujących funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są różnowartościowe? Które są ”na”?
(a) $f(x) = x + 5$,
(b) $f(x) = |x| - 1$,
(c) $f(x) = x^3 - 7$.

2. Niech funkcja $f : (-1, 0] \to [0, 1)$ będzie zadana wzorem $f(x) = x^2$. Udowodnij, ze jest ona róznowartościowa i ”na”.

3. Niech X będzie zbiorem okręgów na płaszczyźnie. Zadajemy funkcje $f : X \to (0, \infty)$ następująco: jeśli okrąg $o \in X$ ma promień r, to $f(o) = r$. Czy taka funkcja jest poprawnie zdefiniowana? Czy jest ona różnowartościowa lub ”na”?

4. Wskaż jakąś bijekcję między zbiorami: $A = \{n \in \mathbb{N} : 3 < n < 14 \ i \ 2|n\}$ i $B = \{a, b, c, y, z\}$.

5. Podaj przykład dwóch zbiorów równolicznych i nierównolicznych (najlepiej nieskończonych).

6. Czy podane niżej funkcje są różnowartościowe lub ”na”?
(a) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(k, n) = k^2 - 4n$,
(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k - 4$,
(c) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n, k) = n^2 + k^2$,
(d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - y, x + y)$.

7. Uzasadnij, że jeśli dwa zbiory skończone mają tyle samo elementów, to są równoliczne.

8. Udowodnij, że jeśli $|A| = |B|$, to również $|B| = |A|$.

9. Udowodnij, że jeśli $|A| = |B|$ oraz $|B| = |C|$, to również $|A| = |C|$.

10. Uzasadnij, że wszystkie poniższe zbiory mają tę samą moc:
(a) $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$,

(b) $F = \{100, 101, 102, ...\}$,
(c) $G = \{2, 4, 6, ...\}$,
(d) $H = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 5 \ (mod\ 17)\}$,
(e) $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$,
(f) $I = \{k \in \mathbb{Z} : k \equiv 3 \ (mod\ 7)\}$,
(g) $P = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ jest l. pierwsza}\}$.

11. Pokaż, że dwa dowolne z odcinków $[0, 1], [0, 100], [-1, 1], [43, 87], [-137, -54], [a, b]$ ($a < b$) są równoliczne.

12. Podaj równoliczność między odcinkami $[0, 1], (0, 1], (0, 1)$.

13. Pokaż, że prosta $\mathbb{R}$ jest równoliczna z odcinkiem $(-1, 1)$.

14. Wskaż równoliczność między odcinkiem $[0, 360^o)$, a okręgiem o dowolnym środku i dowolnym promieniu.

15. Pokaż, że prosta $\mathbb{R}$ jest równoliczna z wykresem dowolnej funkcji liniowej na płaszczyźnie, tzn.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}.$$

16. Udowodnij, że $\mathbb{N}$ nie jest równoliczne z $(0, 1)$.

17. Udowodnij, że $\mathbb{N}$ jest równoliczne z $\mathbb{N}^2 = \{(n, k) : n, k \in \mathbb{N}\}$.

18. Sprawdź, że funkcja $f : (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ zadama wzorem

$$f(n, k) = 2^n(2k + 1) - 1$$

jest wzajemnie jednoznaczna ($\iff$ jest bijekcją $\iff$ jest różnowartościowa i ńa").

19. Udowodnij, że jeśli $A \subset B$, to $|A| \leq |B|$.

20. Udowodnij, że jeśli $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |C|$, to $|A| \leq |C|$.

21. Korzystając z tego twierdzenia udowodnij jeszcze raz zadanie 12.

22. Przypominając sobie zadanie 17 udowodnij, że

$$|\mathbb{N}| = \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}.$$

23. Wskaż bijekcję między $\mathbf{P}(A)$ oraz $\{0, 1\}^A$.

---

24. Zbiór liczb niewymiernych $N\mathbb{Q}$ jest większy od $\mathbb{Q}$ (tzn. $|\mathbb{Q}| < \|N\mathbb{Q}|$),

25. $|A| < |\mathbf{P}(A)|$ (wsk. rozważ zbiór $\{a \in A : a \notin A\}$,

26. $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbf{P}(\mathbb{N})|$ (wsk. $\mathbf{P}(\mathbb{N}) = \mathbf{P}(\mathbb{N}^2)$),

27. $|\mathbb{R}| \leq |\mathbf{P}(\mathbb{Q})| = |\mathbf{P}(\mathbb{N})|$,

28. $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$,

29. Wniosek: $|\{0, 1\}|^{\mathbb{N}} = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbf{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$,

30. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$ (wsk: skorzystaj z: $|\mathbb{R}| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$).

---

10. LICZBY ZESPOLONE

10.1. **Wprowadzenie.** Liczba zespolona z, to para liczb rzeczywistych (a, b). Zapisujemy ją

$$z = a + bi.$$

Liczbę i nazywamy *jednostką urojoną*.

Liczby zespolone dodajemy naturalnie, a mnożymy tak, że $i^2 = -1$, tzn.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Elementem neutralnym dodawania (zerem), jest $0 = 0 + 0i$, a mnożenia (jedynką) $1 = 1 + 0i$. Liczbę $a = \Re(z)$ z przedstawienia $z = a + bi$ nazywamy częścią rzeczywistą, a liczbę $b = \Im(z)$ (nie bi) - częścią urojoną.

Sprzężenie liczby z to $\bar{z} = a - bi$. Moduł, to odległość pary $z = a + bi \sim (a, b)$ od początku układu na płaszczyźnie, tzn. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Każdy element $z = a + bi$ ma przeciwny $-z = -a - bi$ oraz każdy element niezerowy ma odwrotny

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Zachodzą wszystkie prawa działań znane dla liczb rzeczywistych, m.in. dodawanie i mnożenie są przemienne oraz łączne. Zachodzi prawo rozdzielności.

Liczby zespolone mają interpretację geometryczną. Rozważmy liczbę $z = a + bi$. Wyciągając przed nawias jej moduł, mamy: $z = |z|(a' + b'i)$, gdzie $a' = \frac{a}{|z|}, b' = \frac{b}{|z|}$ oraz $a' + b'i$ jest w odległości 1 od zera. Wszystkie takie liczby można zapisać, jako $\cos(\phi) + i\sin(\phi)$. Ostatecznie dostajemy:

Fakt 10.1 (Postać trygonometryczna)
Każda liczba zespolona $z \in \mathbb{C}$ jest postaci $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$, gdzie $r = |z|$, zaś ϕ to kąt pomiędzy osią $0X$, a odcinkiem $0z$. Ponadto jeśli $z_1 = r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))$, oraz $z_2 = r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))$, to $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$. Dodatkowo $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.

Definicja 10.2
Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w taką, że $w^n = z$. (uwaga: oznaczenie $\sqrt[n]{z}$ nie jest jednoznaczne!)

Twierdzenie 10.3 (Zasadnicze twierdzenie algebry)
Niech $P(z) = a_n z^n + ... + a_0 z^0$, gdzie $a_n, a_{n-1} ..... a_0 \in \mathbf{C}$. Wtedy istnieje $w \in \mathbf{C}$ takie, /ze $P(w) = 0$.
W konsekwencji wielomian zespolony stopnia n ma n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami).

Wniosek 10.4
Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe o współczynnikach zespolonych.

Wniosek 10.5
Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na czynniki stopnia 1 i 2 (liniowe i kwadratowe) o współczynnikach rzeczywistych.

10.2. **Lista zadań.**

1. Podaj część rzeczywistą, urojoną, moduł, sprzężenie, liczbę przeciwną i odwrotną do liczby zespolonej:

$$a)2i, \qquad b)-1+7i, \qquad c)-5-3i.$$

2. Wykonaj działania:

$$a)(5-(6+4i))-(3+2i)(3-2i), \qquad b)(2-i)^3,$$

$$c)\frac{3-i}{1+2i}, \qquad d)\frac{1+2i}{i^{2011}}, \qquad e)\frac{(\sqrt{3}+i)(2+i)}{3-4i}.$$

$$(1-3i)\cdot(2+5i)-5-6i, \qquad (1+i)^3, \qquad (a+bi)\cdot(c+di).$$

$$a)(2-i)(3+2i)-5i, \qquad b)(5-(6+4i))-(3+2i)(3-2i), \qquad c)(2-i)^3,$$

$$d)\frac{3-i}{1+2i}, \qquad e)\frac{5+3i}{5-3i}\frac{9i-15}{2i+7}, \qquad f)\frac{1+2i}{i^{2011}}, \qquad g)\frac{(\sqrt{3}+i)(2+i)}{3-4i}.$$

3. Oblicz i^n dla $n \in \mathbb{Z}$.

4. Uzasadnij, że jeśli $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 0$, to jedna z liczb z_i jest zerem.

5. Policz $z^{-1} = \frac{1}{z}$ dla liczb: $z = 5,\ 4i,\ 1+i,\ 4-5i,\ i-16.$

6. Udowodnij prawo rozdzielności: $(z_1+z_2)\cdot z_3 = z_1\cdot z_3 + z_1 \cdot z_3.$

7. Znajdź z, gdy $iz+5-2i = 3z-4i.$

8. Rozwiąż równania:

$$a)|z|^2 - z = 4-2i, \quad b)|z|-z = 3+2i, \quad c)|z| = -\overline{z}, \quad d)i(z+\overline{z})+3 = 2i - i(z-\overline{z}).$$

9. Udowodnij wzory:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.$$

10. Zapisz w postaci trygonometrycznej liczby: $a)17, \quad b)-i,$

$$c)-6+6i, \quad d)\sqrt{2}+\sqrt{6}i, \quad e)\sqrt{3}-i, \quad f)1-\sin(\alpha)+i\cos(\alpha) \ (0<\alpha<\pi/2).$$

11. Zaznacz na płaszczyźnie wektory $1+3i$ oraz $2-i$. Potem policz ich sumę i iloczyn i również zaznacz na płaszczyźnie. Dodaj i pomnóż te dwie liczby geometrycznie?

---

12. Udowodnij wzory:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad z_1 \bar{\cdot} z_2 = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

13. Uzasadnij nierówności:

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \qquad |z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|.$$

14. Rozwiąż równania kwadratowe w zmiennych zespolonych: $a)z^2-5z+6$

$$b)z^2+1=0, \quad c)z^2+2z+2=0, \quad d)z^2-z+1, \quad e)z^2+z(i-4)+5+i=0.$$

15. Znajdź wszystkie liczby zespolone, które spełniają równania kwadratowe:

$$a)z^2-5z+6=0, \quad c)z^2+2z+2=0, \quad d)z^2-z+1, \quad e)z^2+z(i-4)+5+i=0.$$

16. Rozwiąż równania:

$$a)\ 1-i+\frac{1}{2z} = 3i, \quad b)|z|^2-z = 4-2i, \quad c)|z|-z = 3+2i, \quad d)|z| = -\bar{z}, \quad e)i(z+\bar{z})+3 = 2i-i(z-\bar{z}).$$

17. Znajdź wszystkie liczby zespolone z, dla których $\overline{z} = z^2$.

18. Narysuj figurę złożoną z punktów, które spełniają warunek (-ki):

$$a)\mathcal{R}e(z) = 5/2, \quad b)|z| = 1, \quad c)|z-2| = 3, \quad d)|z-i+4| = 9,$$
$$e)\mathcal{I}m(z) \in [-1,4) \ i \ \mathcal{R}e(z) < 7, \quad f)|z| + \mathcal{R}e(z) < 1, \quad g)\mathcal{R}e(1/z) = 2,$$
$$h)|z-1| = |z+2|, \quad i)|z-i| \geq |z+1-3i|, \quad j)\big||z-2i| - |z+2i|\big| = 4.$$

19. Wywnioskuj nierówności (geometrycznie lub algebraicznie):

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

20. Wymnóż dwie liczby zespolone zapisane w postaci trygonometrycznej, tzn.

$$[r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))] \cdot [r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))].$$

21. Iterując formułę z poprzedniego zadania wyprowadź wzór de Moivre'a:

$$z^n = [r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)]^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)).$$

22. Jak zapisać liczbę odwrotną do liczby w postaci trygonometrycznej? Jak zatem dzieli się dwie liczby w tej postaci?

23. Oblicz $(1+i)^{1000}$.

24. Oblicz: $\quad a)(\sqrt{3} - 3i)^6, \quad b)(2-2i)^{17},$

$$c)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}, \quad d)(\cos(33^o) + i\sin(33^o))^10, \quad e)\frac{(1+i)^22}{(1-i\sqrt{3})^6}.$$

25. Oblicz wszystkie pierwiastki:

$$a)\sqrt{2}, \quad b)\sqrt{i}, \quad c)\sqrt{1+i}, \quad d)\sqrt[3]{-1}, \quad e)\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}, \quad f)\sqrt[6]{1+i}, \quad g)\sqrt[4]{-16}.$$

26. Wyraź $\sin(3\theta)$ jako funkcję $\sin\theta$. Podobnie z $\cos(3\theta), \sin(4\theta)$.

27. Rozłóż na czynniki wyrażenie:

$$x^4 + 4.$$

Podpowiedź: rozwiąż równanie $z^4 + 4 = 0$

28. Rozłóż na czynniki stopnia 1 i 2 wielomiany:

$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24, \quad x^4 + 64, \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2.$$

Wskazówka: w ostatnim przykładzie zauważ, że wielomian w punkcie i jest równy zero.

29. Udowodnij, że w równoległoboku przekątne przecinają się w połowie długości.

30. Udowodnij, że w trójkącie środkowe przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku 2 : 1.

31. Na każdym boku czworokąta wypukłego zbudowano kwadrat. Wykaż, że odcinki, które łaczą śdorki przeciwległych kwadratów są wzajemnie prostopadłe i tej samej długości.

32. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

33. Dane są punkty B i C. Punkt A jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przez prostą BC. Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Wykaż, że wszystkie tak otrzymane proste DF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia B i C .

34. Trójkąty równoboczne A_1B_1C, A_2B_2C i A_3B_3C są zorientowane antyzegarowo. Punkty M_1, M_2 i M_3 są środkami odpowiednio odcinków A_2B_3, A_3B_1 i A_1B_2. Udowodnij, że trójkąt $M_1M_2M_3$ jest równoboczny i zorientowany zegarowo.

35. Trójkąty $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ i $A_kB_kC_k$ dla $k = 1, 2, 3$ są równoboczne i zorientowane antyzegarowo. Wykaż, że trójkąt $C_1C_2C_3$ także spełnia te warunki.

36. Niech $A = (3, 1)$, $B = (3, -1)$, $C = (7, -1)$, $D = (1, 1)$ i $O = (0, 0)$.
Oblicz $\measuredangle AOB + \measuredangle COD$.

37. Na bokach dowolnego trójkąta zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne. Udowodnij, że ich środki tworzą trójkąt równoboczny.

38. Niech $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Wykazać, że na to, żeby liczby z_1, z_2, z_3 były wierzchołkami trójkąta równobocznego potrzeba i wystarcza, by $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

39. Wykazać, że jeżeli środek ciężkości i środek koła opisanego na trójkącie pokrywają się, to trójkąt jest równoboczny.

---

40. Rozwiązać równanie

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 = i$$

41. Rozwiąż, względem niewiadomej z, równanie

$$az + b\overline{z} = c$$

dla $a, b, c \in \mathbb{C}$

42. Zbadaj zbiór punktów $\{z \,|\, A|z|^2 - \overline{B}z - B\overline{z} + C = 0\}$ gdzie $A \neq 0$, A, C są rzeczywiste i $|B|^2 > AC$.

43. Dla wielomianu $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych wiadomo, że: $W(1) = 17$, $W(-1) = 13$, $W(i) = 1 + i$, $W(-i) = 4 - 5i$. Policz sumę współczynników przy potęgach dających resztę 3 z dzielenia przez 4.

44. Uzasadnij, że pierwiastków zespolonych stopnia k z liczby z jest co najwyżej k.

45. Udowodnij, że $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow Im(z) > 0$. Zinterpretuj geometrycznie.

46. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia n z 1.

47. Udowodnij, że jeśli $\mathrm{Im}(z) = 0$, to $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

48. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwu wierzchołkom odpowiadają liczby z oraz w.

49.
- Zapisz w postaci $a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) iloczyn $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$,
- o kątach α, β, γ wiadomo, że $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ oraz że $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\gamma = \frac{1}{8}$. Oblicz $\alpha + \beta + \gamma$.

50. Udowodnij, że jeśli P jest wielomianem rzeczywistym przyjmującym tylko wartości dodatnie, to istnieją wielomiany rzeczywiste Q, R takie, że $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

51. Powołując się wyłącznie na liczby zespolone, zapisz $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ jako sumę dwóch kwadratów.

52. * $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + c$, $c \in \mathbf{R}$. Zakładamy, że ma pięć pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Niech: $Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2)$ Ile wynosi suma modułów współczynników wielomianu $Q(x)$?

53. * Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Rozważmy funkcje $f(x) = ax + b\,|x|$ oraz $g(x) = ax - b\,|x|$. Wykazać, że jeśli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to również $g(g(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

54. * Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x+y$ jest liczbą wymierną, to $W(x)+w(y)$ jest liczbą wymierną .

55. Pokaż, że $\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n}{2k} = 2^{1/n}\cos(\frac{n\pi}{4})$.

56. Pokaż, że $\cos(\frac{\pi}{11})+\cos(\frac{3\pi}{11})+\cdots+\cos(\frac{9\pi}{11}) = \frac{1}{2}$.

57. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwóm wierzchołkom odpowiadaja liczby z oraz w.

58. Opisz geometrycznie przekształcenie płaszczyzny $z \to iz$.

59. Udowodnij, że $|\frac{z-i}{z+i}| < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Im(z) > 0$. Zinterpretuj geometrycznie.

60. Pokaż Ptomeleusza: $ABCD$ jest czworokątem wypukłym. Wówczas $|AC|\cdot|BD| \leq |AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC|$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.

61. Przedstaw $\cos(x)+\cos(3x)+\cdots+\cos((2n-1)x)$ w postaci iloczynu.

62. Pięciokąt foremny wpisujemy w okrąg, a następnie wybieramy pewien punkt p na tym okręgu, który nie jest wierzchołkiem. Pokaż, że suma kwadratów długości odcinków łączących punkt p z wierzchołkami pięciokąta jest niezależna od wyboru punktu p.

63. Pokaż, że $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ jest sumą dwóch kwadratów.

64. Niech $W(x)$ będzie wielomianem takim, że dla każdej liczby rzeczywistej x mamy $W(x) \geq 0$, Pokaż, że istnieją wielomiany P, Q takie, że $W(x) = P^2(x) + Q^2(x)$.

65. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z, dla których $\overline{z} = z^2$.

66. Niech $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Wykazać, że na to, żeby liczby z_1, z_2, z_3 były wierzchołkami trójkąta równobocznego potrzeba i wystarcza, by $z_1+z_2+z_3 = 0$

67. Wykazać, że jeżeli środek ciężkości i środek koła opisanego na trójkącie pokrywają się, to trójkąt jest równoboczny.

68. Rozwiązać równanie

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^3 = i$$

69. Rozwiązać, względem niewiadomej z, równanie

$$az + b\overline{z} = c$$

dla $a, b, c \in \mathbb{C}$

70. Iloczyn wszystkich zbiorów domkniętych i wypukłych zawierających zbiór A nazywamy *otoczką wypukłą* zbioru A i oznaczamy symbolem $conv(A)$. Wykazać, że

$$conv\{z_1; z_2; \ldots; z_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} m_k z_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} m_k = 1,\ m_k \geq 0 \right\}$$

71. Wykazać, że gdy dla pewnego ζ mamy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta - z_k} = 0$$

to $\zeta \in conv\{z_1; z_2; \ldots; z_n\}$

72. Udowodnić Twierdzenie Gaussa-Lucasa:
Wszystkie miejsca zazrowe pochodnej wielomianu $P(z)$ należą do otoczki wypukłej miejsc zerowych wielomianu $P(z)$.

73. Udowodnić Twierdzenie Enestroma:
Niech $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z_n$, gdzie $n \geq 1$ i $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$. Wtedy zera wialomianu $P(z)$ spełniają $|z| \geq 1$

74. Zbadać zbiór punktów $\{z \,|\, A|z|^2 - \overline{B}z - B\overline{z} + C = 0\}$ gdzie $A \neq 0$, A, C są rzeczywiste i $|B|^2 > AC$.

75. Przedstwaić *homografię*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

gdzie $ad - bc \neq 0$ w postaci superpozycji przekształceń liniowych (*homotetii* $g(z) = ez + h$) i odwrotności $(1/z)$

76. Niech

$$GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;:\; a, b, c, d \in \mathbb{C},\; ad - bc \neq 0 \right\}$$

oraz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Pokaż, że dla $M, N \in GL_2(\mathbb{C})$ zachodzi $M(Nz) = (MN)z$. Wywnioskować wzór na przekształcenie odwrotne do $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

77. Wykazać, że każdą homografię z dwoma różnymi punktami niezmiennymi α oraz β można zapisać w postaci

$$\frac{f(z) - \alpha}{f(z) - \beta} = A \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

78. Wykazać, że homografia z jednym punktem niezmienniczym ∞ redukuje się do przesunięcia. Dowieść, że homografię z jednym punktem niezmiennym α można zapisać w postaci

$$\frac{1}{f(z) - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + h$$

79. Dany ciąg $\{z_n\}$ określamy rekurencyjnie: z_0 jest dane, $z_{n+1} = f(z_n)$ przy czym f jest homografią bądź z jednym, bądź z dwoma punktami niezmiennymi. Zbadać zbieżność ciągu $\{z_n\}$

80. Znaleźć punkty skupienia ciągu: $z_0 = 0$, $z_{n+1} = \frac{z_n + i}{z_n - i}$

81. Dowieść, że homografia zachowuje kąty pomiędzy krzywymi.

11. CIĄGI LICZBOWE

11.1. **Wprowadzenie.** Przypomnijmy, że ciągiem a nazywamy funkcję $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ i najczęściej ciąg będziemy oznaczać (a_n). Taka funkcja może być zdefiniowana wzorem, ale istnieją też inne sposoby, na przykład - rekurencja (podajemy pierwsze wyrazy i relacje między sąsiednimi wyrazami). Każdy ciąg posiada swój wykres na który składają się punkty (n, a_n) w układzie kartezjańskim.

Definicja 11.1
Ciąg (a_n) nazywamy:

- *rosnącym*, gdy $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n < a_{n+1}$,
- *niemalejącym*, gdy $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq a_{n+1}$,
- *malejącym*, gdy $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n > a_{n+1}$,
- *nierosnącym*, gdy $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \geq a_{n+1}$,
- *ograniczonym*, gdy $\exists M \ \forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leq M$,
- *ograniczonym z góry*, gdy $\exists M \ \forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq M$,
- *ograniczonym z dołu*, gdy $\exists m \ \forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \geq m$.

Definicja 11.2 (Granica ciągu)
Liczbę $g \in \mathbf{R}$ nazywamy *granicą ciągu*, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbf{N} \ \ \forall n \geq N \quad |a_n - g| < \varepsilon. \tag{11.1}$$

Jeśli taka liczba g istnieje, to piszemy $g = \lim_{n\to\infty} a_n$ i mówimy, że ciąg (a_n) jest *zbieżny* do liczby g.

Powyższa definicja jest jedną z najważniejszych w analizie matematycznej. Intuicyjnie rozumiemy tak: "dalekie wyrazy ciągu są coraz bliższe liczbie g". Zauważmy, że nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ oznacza dokładnie: "odległość liczb a_n oraz g jest mniejsza niż ε", czyli $a_n \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. Natomiast kwantyfikatory $\exists N \ \forall n \geq N$ oznaczają, że ten warunek jest prawdziwy dla wszystkich liczb $N, N+1, N+2, ...$, czyli od pewnego miejsca N. Inaczej mówiąc, jeśli g jest granicą ciągu (a_n), to biorąc dowolny przedział $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ tylko skończenie wiele wyrazów ciągu może być poza tym przedziałem.

Powyższa definicja zakłada milcząco, że jeśli granica ciągu istnieje, to jest tylko jedna liczba g spełniająca warunek (11.1). Uzasadnimy to teraz precyzyjniej.

Fakt 11.3
Jeśli ciąg (a_n) jst zbieżny, to istnieje tylko jedna liczba g spełniająca warunek (11.1).

Dowód. Będziemy rozumowali nie wprost. Niech g_1 i g_2 będą dwiema różnymi liczbami spełniającymi (11.1). Możemy przyjąć, że $g_1 < g_2$. Oznaczmy przez $d = g_2 - g_1$ odległość tych liczb. Korzystając z definicji (11.1) dla $\varepsilon = d/2$ dostajemy N_1 i N_2 takie, że:

$$\forall n \geq N_1 \ \ |a_n - g_1| < d/2 \qquad \text{oraz} \qquad \forall n \geq N_2 \ \ |a_n - g_2| < d/2.$$

Oczywiście dla $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ zachodzą obie te nierówności, czyli dla $n \geq N$ zachodzi

$$a_n \in (g_1 - d/2, g_1 + d/2) \cap (g_2 - d/2, g_2 + d/2),$$

ale to jest niemożliwe, bo przedziały: $(g_1 - d/2, g_1 + d/2)$ i $(g_2 - d/2, g_2 + d/2)$ są rozłączne (sprawdź to!). Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Fakt 11.4
Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, to jest ograniczony.

Dowód. Niech $g = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wtedy z (11.1) dla $\varepsilon = 1$ istnieje N takie, że

$$\forall n \geq N \quad |a_n - g| < 1,$$

czyli dla $n \geq N$ zachodzi $a_n \in (g-1, g+1)$. W szczególności (sprawdź to!)

$$|a_n| \leq \max(|g-1|, |g+1|)$$

dla $n = N, N+1, ...$ Niech teraz $M := \max(|a_1|, ..., |a_{N-1}|, |g-1|, |g+1|)$. Łatwo sprawdzamy, że $|a_n| \leq M$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ (dla $n < N$ jest to jasne, dla $n \geq N$ już sprawdziliśmy). □

Mając do policzenia granicę ciągu rzadko będziemy sprawdzali warunek (11.1) bezpośrednio. Mając złożone wyrażenie definiujące ciąg (a_n) możemy sprowadzić policzenie granicy $\lim_{n\to\infty} a_n$ do liczenia granicy poszczególnych "elementów" dzięki następującemu twierdzeniu.

Twierdzenie 11.5 (Arytmetyka granic)
Niech (a_n) oraz (b_n) będą ciągami zbieżnymi oraz: $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim_{n\to\infty} b_n$. Wtedy:

1.
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

3. Zakładając że $b_n, B \neq 0$ mamy:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Dowód. Udowodnimy tylko własność z mnożeniem. Pozostałe własności zostawiamy jako zadania 18 i 19. Niech (a_n), (b_n), A, B będą jak wyżej. Z faktu 11.4 mamy M takie, że $\forall n \in \mathbf{N}$ mamy $|a_n| \leq M$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ [13] Pokażemy teraz, że $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < \varepsilon$ dla n od pewnego miejsca. Niech $M' = \max M, |B|$. Ponieważ $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ oraz $B = \lim_{n\to\infty} b_n$ to korzystając z definicji dla $\varepsilon/2M' > 0$ (dlaczego tak można?) dostajemy N_1 i N_2 takie, że

$$\forall n \geq N_1 \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M'} \qquad \text{oraz} \qquad \forall n \geq N_2 \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M'}.$$

Oczywiście dla $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ zachodzą obie te nierówności. I dla takich n ($n \geq N$) zachodzi to, czego potrzeba, czyli:

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot B + a_n \cdot B - A \cdot B| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |a_n - A| \cdot B \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M'} + \frac{\varepsilon}{2M'} \cdot B \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

czyli pokazaliśmy, że $A \cdot B = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot B_n)$. □

Przykład 11.6
Arytmetyka granic oznacza na przykład, że mając ciąg (przyjmujemy $d_n \neq 0$):

$$e_n = \frac{a_n \cdot b_n - c_n}{d_n}$$

możemy policzyć po prostu granice ciągów a_n, b_n, c_n, d_n (niech wynoszą one odpowiednio A, B, C, D, $D \neq 0$). Wtedy ciąg e_n ma granicę i wynosi ona $(A \cdot B - C)/D$.

---

[13] Taka formułka jest jedną z częściej spotykanych w dowodach z analizy. Skoro mamy coś pokazać dla każdego $\varepsilon > 0$, to piszemy ustalmy $\varepsilon > 0$, żeby mieć na myśli jakąś konkretną liczbę przez cały dowód, a na koniec i tak powiemy, że ε było ustalone, ale dowolne.

Definicja 11.7 (Granica niewłaściwa ciągu)
Mówimy, że ciąg (a_n) jest *rozbieżny* do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n > M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Analogicznie, ciąg (a_n) jest *rozbieżny* do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Fakt 11.8
Jeśli w ciągu (a_n) zmienimy lub pominiemy skończenie wiele wyrazów ciągu, to nie ma to wpływu na istnienie i wartość granicy.

Fakt 11.9
Załóżmy , że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim_{n\to\infty} b_n$ oraz $a_n \leq b_n$ (odpowiednio $a_n \geq b_n$). Wtedy to $A \leq B$ (odpowiednio $A \geq B$).

Uwaga: jeśli w powyższym fakcie znak "$\leq$" zastąpimy w obu miejscach przez "$<$", to nie jest to prawda, patrz zadanie 21.

Twierdzenie 11.10 (Twierdzenie o trzech ciągach)
Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g.

Powyższe twierdzenie możemy również zastosować do ciągów mających granice niewłaściwe. Wtedy formułujemy je następująco.

Twierdzenie 11.11 (Twierdzenie o dwóch ciągach)
Załóżmy, że ciągi (a_n), (b_n) spełniają warunek $a_n \leq b_n$. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to również $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Podobnie, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ implikuje $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Fakt 11.12
Niech ciąg (a_n) będzie monotoniczny (niemalejący lub nierosnący). Wtedy:

1. jeśli (a_n) jest organiczony, to ma granicę.
2. jeśli (a_n) nie jest organiczony ma granicę niewłaściwą.

Dowód. Rozważmy tylko ciągi niemalejące. Niech (a_n) będzie takim ciągiem. Wtedy są dwie możliwości. Jeśli ciąg jest nieograniczony, to łatwo sprawdzamy, że jest rozbieżny do $+\infty$. Jeśli jest ograniczony, to $g = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbf{N}\}$ jest granicą takiego ciągu. Fakt ten wynika bezpośrednio z monotoniczności i definicji kresu (sprawdź!). $\square$

Uwaga 11.13
Warto pamiętać, że arytmetyka granic zachodzi też w niektórych przypadkach niewłaściwych, o ile nie dochodzimy do symboli nieoznaczonych takich jak:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

11.1.1. *Przykłady.*

Przykład 11.14

Kilka podstawowych granic:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ dla $a > 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ dla $|a| < 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ nie istnieje,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Przykład 11.15

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^4-n^2+1}{5n^5-n^3+1}+\frac{3n^4-2n^2+4}{5n^5-2n^3+8}+\frac{3n^4-3n^2+9}{5n^5-3n^3+27}+\ldots+\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}+\ldots+\frac{3n^4-2n^3+4n^2}{5n^5-2n^4+8n^3}\right).$$

Rozwiązanie. Dana pod znakiem granicy suma ma $2n$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}\le\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-0+4n^2}{5n^5-2n^4+0}=\frac{2n\left(3n^4+4n^2\right)}{5n^5-2n^4}=c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}\ge\sum_{k=1}^{2n}\frac{3n^4-2n^3+0}{5n^5-0+8n^3}=\frac{2n\left(3n^4-2n^3\right)}{5n^5+8n^3}=a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności $a_n \le b_n \le c_n$, a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=6//5,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=6//5.$$

□

11.2. **Lista zadań.**

1. Dla $\varepsilon = 0,1$ znaljdź liczbę naturalną N taką, że

$$\left|\frac{3n-2}{n+1}-3\right|<\varepsilon,\quad \text{dla } n\ge N.$$

Zrób to samo dla $\varepsilon = 0,001$ a potem dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$.

2. Udowodnij, że $g = 1$ jest granicą ciągu $a_n = \frac{1}{1+n}$, tzn. dla ustalonego $\varepsilon > 0$ znajdź N takie, że dla $n \geq N$ zachodzi:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

3. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)
$$\frac{n}{n+7}$$

(b)
$$\frac{4n^2+3n}{n+1}$$

(c)
$$\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$$

(d)
$$\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$$

(e)
$$n \cdot (-1)^n$$

(f)
$$2^n - \frac{1}{n}$$

4. Wyjaśnij, dlaczego poniżej są same bzdury:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = 0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}.$

5. Uzasadnij, że jeśli ciąg (a_n) ma granicę $A > 0$, to tylko skończenie wiele wyrazów ciągu może być ujemnych.

6. Uzasadnij, że jeśli ciągi (a_n) i (b_n) mają granice A i B oraz $d := B - A > 0$, to istnieje N takie, że

$$\forall n \geq N \quad b_n - a_n > d/2$$

Wskazówka: przyjrzyj się dowodowi faktu 11.3.

---

7. Wyprowadź z definicji zbieżności ciągu następujące równości:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3},$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0,$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0,$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+1}{2n^2+n+1} = \frac{1}{2}.$$

8. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)
$$\frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$$

(b)
$$\frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$$

(c)
$$\frac{n}{1+\sqrt{n}}$$

(d)
$$\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$$

(e)
$$\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$$

(f)
$$\frac{7n + (\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$$

9. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)
$$\frac{1-2+3-4+5-6+...-2n}{\sqrt{n^2+2}}$$

(b)
$$\frac{1+2+4+...+2^n}{1+3+9+...+3^n}$$

(c)
$$\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$$

(d)
$$\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}$$

(e)
$$\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+...+\frac{n^2+n}{n^3+n}$$

(f)
$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}$$

10. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)
$$\sqrt[n^2]{n}$$

(b)
$$\sqrt[n]{n^2}$$

(c)
$$\sqrt[n]{n+17}$$

(d)
$$\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$$

(e)
$$\sqrt{n^2+3n}-n$$

(f)
$$n(\sqrt{n^2+7}-n)$$

(g)
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$$

(h)
$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$$

(i)
$$\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$$

(j)
$$\frac{n^7}{7^n}$$

(k)
$$\frac{10^n}{n!}$$

(l)
$$\frac{n!}{n^{22}}$$

11. Oblicz wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{\sqrt{9^n+n^{2010}}}$$
lub uzasadnij, że granica nie istnieje.

12. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^3+k}{n^4+(-1)^k\cdot k^2}\ .$$

13. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3\cdot\sqrt{n^2+1}-n^4-\frac{n^2}{2}\right)\ .$$

14. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{8n^2+1}}{\sqrt{2n^4+1}}+\frac{\sqrt{8n^2+2}}{\sqrt{2n^4+2}}+\frac{\sqrt{8n^2+3}}{\sqrt{2n^4+3}}+\frac{\sqrt{8n^2+4}}{\sqrt{2n^4+4}}+\ldots+\frac{\sqrt{8n^2+3n}}{\sqrt{2n^4+3n}}\right)\ .$$

15. Pokaż, że jeśli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) nie musi być zbieżny. A jeśli ciąg (a_n^2) jest zbieżny do zera?

16. Pokaż, że jeśli nieujemny ciąg (a_n) jet zbieżny do $a>0$, to ciąg $(\sqrt{a_n})$ jest zbieżny do $\sqrt{a}$.

17. Załóżmy, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, $\lim_{n\to\infty}a_n=A>0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ oraz $b_n>0$. Udowodnij, że:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

18. Udowodnij punkt **1.** twierdzenia 11.5.

19. Udowodnij punkt **3.** twierdzenia 11.5.

20. Załóżmy, że (a_n) jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |g|$. Pokaż, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi, tzn. podaj przykład ciągu (b_n), który nie jest zbieżny, ale $(|b_n|)$ już jest zbieżny.

21. Podaj przykład dwóch ciągów zbieżnych takich, że $a_n < b_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ (por. fakt 11.9).

22. Czy prawdziwe są następujące stwierdzenia:

(a) Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
(b) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
(c) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
(d) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
(e) Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.
(f) Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2}$, to $a_n \to \frac{1}{2}$.
(g) Jeżeli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
(h) Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
(i) Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodanie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.
(j) Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

23. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall n > 1000 \quad |a_n - 100| < 10 .$$

Czy stąd wynika, że:

(a) ciąg (a_n) jest zbieżny,
(b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,
(c) $a_{1111} > 88$,
(d) $\forall n > 345 \ |a_n - 100| < 17$,
(e) $\forall n > 5555 \ |a_n - 99| < 13$,
(f) ciąg (a_n) jest ograniczony,
(g) $\exists n > 444 \ |a_n - 95| < 37$,
(h) $\exists n > 4444 \ |a_n - 80| < 37$,
(i) $\forall m \ \exists n > m \ a_n > 0$,
(j) $\forall n > 1331 \ |a_n - 66| > 12$,
(k) $\forall m > 1234 \ \forall n > 5678 \ |a_n - a_m| < 17$,
(l) $\forall m > 1234 \ \forall n > 5678 \ |a_n - a_m| < 37$,
(m) $\exists m < 123 \ \exists n < 456 \ |a_n - a_m| < 3$,
(n) $\forall m > 12345 \ \forall n > 67890 \ |a_n + a_m| < 210$,
(o) $\forall m > 1296 \ \forall n > 7776 \ |a_n + a_m| < 222$,
(p) $\exists n \ a_n > 91$.

24. Dany jest taki ciąg (a_n), że

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall n \geq 5//\varepsilon \quad |a_n - 7| < \varepsilon .$$

(a) Podaj granicę ciągu (a_n).
(b) Wskaż taką liczbę M, że $\forall n \quad |a_n| < M$.
(c) Wskaż taką liczbę N, że $\forall n \geq N \quad a_n > 6$.
(d) Wskaż taką liczbę N, że $\forall n \geq N \quad a_n < 7,01$.
(e) Wskaż taką liczbę N, że $\forall n \geq N \quad |a_n - 8| > 1//3$.

25. Które z poniższych warunków są równoważne zbieżności ciągu (a_n) do liczby g.

(a) $\forall n \in \mathbf{N} \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall m \geq N \qquad |a_m - g| < \frac{1}{n}$,
(b) $\forall n \in \mathbf{N} \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall m \geq 2^N \qquad |a_m - g| < \frac{1}{2^n}$.

26. Pokaż, że ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, a zatem zbieżny.

27. Znajdź granicę ciągu
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}.$$

28. Udowodnij, że dla $q \in (0,1)$ ciąg $a_n = q^n$ jest zbieżny do zera.
Wskazówka 1: Skorzystaj z tego, że $q^{n+1} = q \cdot q^n$ oraz q_n jest malejący i dodatni.
Wskazówka 2: Skorzystaj z nierówności Bernoulliego zapisując $1/q = 1 + r$ dla $r > 0$.

29. Ciąg (a_n) jest zadany przez: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Udowodnij, że ciąg jest zbieżny i policz jego granicę.

30. Oblicz granicę ciągu
$$a_n = \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}.$$

31. Znajdź granice:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right) \qquad (0 < x < \pi)$$
$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$$

32. Znajdź liczbę naturalną k taką, że
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2008}}{n^k-(n-1)^k}=\frac{1}{2009}.$$

33. Znajdź granice ciągów
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}.$$

34. Znajdź granice ciągów
$$n^{\frac{1}{n^2}}, \qquad n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

35. Niech (q_n) będzie ciągiem liczb wymiernych dodatnich, a (a_n), (b_n) - ciągami liczb naturalnych, takich że
$$q_n = \frac{a_n}{b_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} q_n = x \notin \mathbf{Q}.$$
Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

36. Znajdź granice ciągów:
$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{2^n}\right), \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$
Wskazówka: $a_n \cdot b_n < 1$. Ponadto: $1-2^n \geq \frac{\xi_n}{\xi_{n-1}}$ dla $\xi_n = 1 + \frac{2}{n-1}$ oraz $n \geq 3$.

37. Zakładamy, że ciąg b_n jest zbieżny. Czy ciąg $c_n = n(b_n - b_{n-1})$ może być rozbieżny do $+\infty$?

12. CIĄGI ZADANE REKURENCJAMI

12.1. **Wprowadzenie.** Rekurencyjne zdefiniowanie ciągu polega na tym, że podajemy pierwszy (lub kilka pierwszych wyrazów) i podajemy formułę, która mówi nam jak wyliczać kolejne wyrazy za pomocą wcześniejszych. Zacznijmy od omówienia ciągów arytmetycznych i geometrycznych.

Ciąg arytmetyczny. Jest to ciąg, w którym różnica pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami jest stała. Przykłady takich ciągów:

$$1, 2, 3, 4, ...$$
$$10, 23, 36, 49, ...$$
$$\pi, -\pi, -3\pi, -5\pi, ...$$
$$7, 7, 7, 7, ...$$

Rekurencyjnie ciągi arytmetyczne mają postać.

$$\begin{cases} a_1 & = A \\ a_{n+1} & = a_n + B, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Łatwo zauważyć i udowodnić, że z powyzszego określenia ciągu wynika, że

$$a_n = A + (n-1)B, \qquad n = 1, 2, ...,$$

gdzie A jest pierwszym wyrazem, a B jest różnicą pomiędzy kolejnymi wyrazami. Czasem będzie nas dodatkowo interesować suma $S_n = a_1 + ... + a_n$. Jako jedno z zadań udowodnimy, że

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Ciąg geometryczny. Jest to ciąg, w którym każdy kolejny wyraz powstaje przez pomnożenie poprzedniego przez ustalony czynnik. Przykłady takich ciągów:

$$1, 2, 4, 8, ...$$
$$9, , -3, 1, 1/3, ...$$
$$5, 0, 0, 0, ...$$

Rekurencyjnie ciągi geometryczne mają postać.

$$\begin{cases} a_1 & = A \\ a_{n+1} & = B \cdot a_n, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Nietrudno stąd wywnioskować, że

$$a_n = A \cdot B^{n-1}, \quad n = 1, 2, ...,$$

gdzie A jest pierwszym wyrazem, a B jest ilorazem pomiędzy kolejnymi wyrazami[14]. Dla ciągu geometrycznego w którym $B \neq 1$[15] suma $S_n = a_1 + ... + a_n$ jest zadana wzorem

$$S_n = A\frac{B^{n+1} - 1}{B - 1}, \qquad n = 1, 2, ...,.$$

Rekurencje liniowe stopnia 1. Ciągi arytmetyczne i geometryczne są szczególnymi przypadkami rekurencji liniowych stopnia 1, które mają postać:

$$\begin{cases} a_1 & = A \\ a_{n+1} & = B \cdot a_n + C, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

[14]Zasadniczo będziemy się zajmować tylko ciągami, których wszystkie wyrazy są niezerowe.

[15]jeśli $B = 1$, to jest oczywiście łatwo

W zadaniach poniżej wyznaczymy rozwiązanie ogólne takiej rekurencji.

Rekurencje liniowe stopnia 2. Czasem zdarza się, że wzór rekurencyjny odwołuje się do dwóch ostatnich wyrazów ciągów[16]. Wtedy, aby dobrze określić ciąg potrzebujemy podać dwa pierwsze wyrazy ciągu. Najsłynniejszym przykładem takiego ciągu jest ciąg Fibbonacciego zadany przez rekurencje:

$$\begin{cases} f_1 & = 1 \\ f_2 & = 1 \\ f_{n+2} & = f_{n+1} + f_n, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Aby nauczyć się rozwiązywać rekurencje liniowe rzędu 2 zbadajmy najpierw następujący przykład.

Przykład 12.1

Rekurencja

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_2 & = 5 \\ a_{n+2} & = a_{n+1} + 2a_n, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

ma rozwiązanie

$$a_n = (-1)^n + 2^n.$$

Dowód. Ciąg ten ma wyrazy: $1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, ...$ Jeśli się dokładniej przyjrzymy, to zobaczymy, że wyrazy te są niedalekie od potęg dwójki i możemy zgadnąć rozwiązanie (a potem indukcyjnie udowodnić, że to jest rozwiązanie). My jednak postąpimy inaczej, żeby poznać metodę. Zastanówmy się jakie funkcje postaci x^n mogą spełniać rekurencję (bez warunków początkowych). Musi zachodzić $x^{n+2} = x^{n+1} + 2x^n$, co sprowadza się do tzw. równania charakterystycznego rekurencji:

$$x^2 = x + 2.$$

To równanie ma dwa rozwiązania: $x = -1$ i $x = 2$. Czyli ciągi $(-1)^n$ oraz 2^n spełniają rekurencje. Jeśli przyjrzymy się bliżej, to dla dowolnych stałych c_1 i c_2 ciąg:

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n$$

również spełnia rekurencję (sprawdź!). Ponieważ c_1 i c_2 mzemy wybrać dowolnie, to wystarczy je tak ustalić, żeby zgadzały się również warunki początkowe dla $n = 1$ i $n = 2$. To prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} 1 = a_1 = -c_1 + 2c_2 \\ 5 = a_2 = c_1 + 4c_2 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu dostajemy $c_1 = c_2 = 1$ i rozwiązanie rekurencji:

$$a_n = (-1)^n + 2^n.$$

□

Wróćmy na chwilę do ciągu Fibbonacciego. Możemy zastosować tę samą metodę, aby dostać wzór Bineta (sprawdzenie tego będzie jednym z zadań) na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

[16] Oczywiście może się też odwoływać do większej liczby poprzednich wyrazów.

Równanie charakterystyczne stopnia 2 dla rekurencji liniowych jest równaniem kwadratowym, więc nie zawsze będziemy mieli dwa pierwiastki rzeczywiste z których dostaniemy rozwiązanie. W przypadku jednego pierwiastka (podwójnego) lub braku pierwiastków (czyli dwóch pierwiastków zespolonych) trzeba lekko zmodyfikować tę metodę, ale to już zobaczymy na przykładach później.

12.2. **Lista zadań.**

1. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych w podanym ciągu $(13, 16, 19, ...)$.

2. Znajdź sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7.

3. 76 płyt ustawiona na trzech półkach. Liczba płyt na półce dolnej, środkowej i górnej tworzą ciąg geometryczny. Ile płyt znajduje się na poszczególnych półkach?

4. *Dywan Sierpińskiego* to figura, która powstaje z kwadratu w następujący sposób, w pierwszym etapie należy podzielić kwadrat na 9 mniejszych kwadratów i usunąć środkowy z nich, w następnym etapie postępujemy podobnie tzn. dzielmy każdy z pozostałych kwadratów na 9 kwadratów i usuwamy środkowy itd. Przyjmując długość pierwszego kwadratu 1, oblicz pole pozostałej części tego kwadratu po piątym etapie.

5. Znajdź rozwiązanie rekurencji:

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_{n+1} & = 2 \cdot a_n + 1, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

---

6. Jaka jest największa możliwa liczba obszarów wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

7. Dla każdego $n \geq 1$ niech j_n oznacza liczbę sposobów ułożenia n identycznych kostek domina o wymiarach 2cm x 1cm na prostokącie o wymiarach 2cm x n cm. Znaleźć zależnośść rekurencyjną dla j_n.

8. Dla każdego $n \geq 1$ niech t_n oznacza liczbę ciągów długości n zbudowanych z symboli a, b, c, w których dwie samogłoski nie występują obok siebie. Znaleźć zależność rekurencyjną dla t_n.

9. Dla każdego $n \geq 1$ niech s_n oznacza liczbę sposobów, na które można wciągnąć flagi trzech kolorów na n-metrowy maszt, zakładając, że flagi czerwone mają szerokość 2m, a pozostałe flagi 1m. Znaleźć zależność rekurencyjną dla s_n.

10. *Wieże z Hanoi.* "U zarania czasu Bóg umieścił 64 złote krążki na pierwszej z trzech diamentowych iglic tak, że krążki wyżej umieszczone miały mniejsze promienie. Następnie Bóg polecił grupie mnichów przełożenie tych krążków na trzecią iglicę, ale tak by:
- w jednym ruchu przenosić tylko jeden krążek,
- krążek większy nigdy nie może leżeć na krążku mniejszym,
- można posługiwać się środkową iglicą."

(a) Pokaż jak przełożyć 4 krążki?
(b) Ile minimalnie ruchów potrzeba, żeby przenieść n krążków? Jak mają się do siebie minimalna liczba ruchów dla $n-1$ i n krążków?
(c) Mnisi pracują od zarania dziejów dzień i noc. Ile czasu im to zajmie, jeśli jednej doby przenoszą jeden krążek?

11. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$.

12. Znajdź wzór na ciąg Fibbonacciego.

13. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \end{cases}$$

14. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -1 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 20 \end{cases}$$

15. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -5 \\ a_{n+2} = -a_n \end{cases}$$

16. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = 4\sqrt{2} \\ a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - \sqrt{2}a_n \end{cases}$$

17. Rozwiąż rekurencję:

$$\begin{cases} a_1 = -11\sqrt{2} \\ a_2 = -3 \\ a_3 = -43 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} + 12a_n \end{cases}$$

18. Znajdź ciągi u_n, t_n, jeśli:

$$\begin{cases} t_0 = 2 \\ u_0 = 3 \\ t_{n+1} = 6t_n + 4u_n \\ u_{n+1} = t_n + 3u_n. \end{cases}$$

Wskazówka: Wyprowadź rekurencję tylko dla jednego ciągu.

---

19. (Sortowanie przez łączenie). Mamy 2^n monet, każda innej wagi. Dysponujemy wagą szalkową bez odważników. Naszym zadaniem będzie ułożenie wszystkich monet w kolejności od najcięższej do najlżejszej. Będziemy to robili w następujący sposób. Najpierw podzielimy monety na dwie części po 2^{n-1} monet. Następnie każdą z tych części uporządkujemy od najcięższej do najlżejszej. Potem porównamy najcięższe monety z obu części i cięższą z nich odłożymy jako najcięższą ze wszystkich. Potem porównamy najcięższe monety obu części (jedna z tych części jest teraz mniejsza, ubyła z niej jedna moneta). Cięższą monetę odkładamy na bok jako drugą z kolei. I tak dalej. Trzeba jeszcze wyjaśnić, w jaki sposób porządkujemy obie części. Otóż zrobimy to w taki sam sposób.

20. Znajdź wzór ogólny ciągu:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}, \qquad x_0 = 1.$$

Wskazówka: Zapisz $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ i znajdź układ rekurencji liniowych na a_n i b_n. Rozwiąż.

21. Znajdź wzór ogólny na ciąg:

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 2}{2y_n}, \qquad y_0 = 1.$$

22. Pokaż, że $y_n = x_{2^n = 1}$ (ciągi z dwóch poprzednich zadań).

23. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = 5\frac{3a_n + 1}{2a_n + 6},$$

gdzie $a_1 \in (1, \infty)$. *Wskazówka:* Należy wykazać ograniczoność i monotoniczność ciągu.

24. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4a_n + 1},$$

gdzie $a_1 \in (1, \infty)$. *Wskazówka:* Należy rozłożyć ciąg na dwa podciągi ograniczone i monotoniczne.

13. FUNKCJE: GRANICE I CIĄGŁOŚĆ

13.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale rozważać będziemy funkcje określone na pewnej dziedzinie D_f (np.: prosta, półprosta, przedział, suma przedziałów, itp.). Interesować nas będą dwa, mocno ze sobą związane, pojęcia granicy funkcji i ciągłości funkcji.

Definicja 13.1 (Granica funkcji w punkcie - definicja Heinego)
Niech dana będzie funkcja $f : D_f \to \mathbf{R}$ oraz punkt $x_0 \in \mathbf{R}$. Mówimy, że funkcja f ma granicę g w punkcie x_0, jeśli dla każdego ciągu (x_n), takiego że $x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi, to zapisujemy to

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

Intuicyjnie, jeśli $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$, to "zbliżając się" z punktem x do x_0 wartości funkcji $f(x)$ "zbliżają się" do liczby g. Zauważmy, że punkt x_0 może nie należeć do dziedziny funkcji, ale definicja ma sens jedynie gdy istnieją ciągi punktów z dziedziny zbieżne do punktu x_0. Typowym przykładem może być punkt $x_0 = 1$, gdy dziedziną jest np. $(1, \infty)$ lub $(0, 1) \cup (1, 2)$. Zauważmy też, że nawet jeśli x_0 należy do dziedziny, to wartość $f(x_0)$ nie ma żadnego znaczenia dla powyższej definicji. Inaczej jest w definicji ciągłości - tutaj wartość $f(x_0)$ ma kluczowe znaczenie.

Definicja 13.2
Niech dana będzie funkcja $f : D_f \to \mathbf{R}$ oraz punkt $x_0 \in D_f$. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeśli dla każdego ciągu (x_n), takiego że $x_n \in D_f$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Jak widać definicje te są mocno ze sobą związane. Można to zapisać w następującej formie.

Fakt 13.3
Niech f i $x_0 \in D_f$ będą jak wyżej. Wtedy f jest ciągła w punkie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to x_0} f(x)$ istnieje i jest równa $f(x_0)$.

Czasem przy badaniu granic funkcji wygodne jest rozpatrzenie dwóch przypadków: gdy x-y dążą do x_0 "z prawej strony" (czyli $x > x_0$) oraz "z lewej strony" (czyli $x < x_0$). Jeśli w definicji 13.1 założymy, że ciągi $x_n \in D_f$ spełniają $x_n > x_0$ (alternatywnie $x_n < x_0$), to mówimy, że granica jest prawostronna (lewostronna) i zapisujemy to

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \qquad (\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g).$$

Definicja 13.4 (Granica funkcji w punkcie - definicja Cauchy'ego)
Niech dana będzie funkcja $f : D_f \to \mathbf{R}$ oraz punkt $x_0 \in \mathbf{R}$. Mówimy, że funkcja f ma granicę g w punkcie x_0, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad (0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \; |f(x) - g| < \varepsilon).$$

Podobnie można sformułować definicję ciągłości w wersji Cauchy'ego. Okazuje się, że definicje Heinego i Cauchy'ego są sobie równoważne (zarówno definicje granicy jak i ciągłości).

13.2. **Lista zadań.**

13.2.1. *Zadania.*

1. Naszkicuj wykres funkcji f danej wzorem

(a) $\mathrm{sgn}(\sin x)$

(b) $\{x\} - (\{x\})^2$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{dla} \quad 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{dla} \quad x \geq 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \neq 2 \\ \mathrm{sgn}(x) & \text{dla} \quad x = 2 \end{cases}$

(e) $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

(f) $\dfrac{1}{\{x\}}$

(g) $\mathrm{sgn}(x^3 - x)$

(h) $x^3 \mathrm{sgn}(x)$

(i) $\left|[x + \frac{1}{2}] - x\right|$

(j) $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$

(k) $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$

(l) $f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|$

(m) $f(x) = \{\cos x\}$

(n) $f(x) = [\frac{4}{\pi} \mathrm{arctg} x]$

(o) $f(x) = 2\{\sin x\} - \{2 \sin x\}$

(p) $f(x) = [x] + x$

(q) $f(x) = \{x\} + x$

(r) $f(x) = \left[\left|x - \frac{1}{2}\right|\right]$

2. Oblicz następujące granice:

(a)
$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{1}{x - 7} - \frac{8}{x^2 - 6x - 7} \right)$$

(b)
$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

(c)
$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2}$$

(d)
$$\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

(e)
$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x + 2}$$

(f)
$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$$

(g)
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$$

(h)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{2008} - 1}{x^{10} - 1}$$

(i)
$$\lim_{x \to 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$$

(j)
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

(k)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

(l)
$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\sqrt{2 - x}}{x^2 - 1}$$

(m)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$$

(n)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(o)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(p)
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$

(q)
$$\lim_{x \to 0+} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{1/x} - 1}$$

(r)
$$\lim_{x \to 0-} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{1/x} - 1}$$

(s)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}$$

3. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{dla} \quad 1 \le x < 2 \\ ax-b & \text{dla} \quad 2 \le x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b), dla których funkcja f jest ciągła.

4. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{dla} \quad 1 \le x < 2 \\ x+3 & \text{dla} \quad 2 \le x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b), dla których funkcja f jest ciągła.

5. Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(a) $f(x) = 2x$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 1/10$
(b) $f(x) = 1/x$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 1/100$
(c) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1/50$
(d) $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/1000$
(e) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 30$, $\varepsilon = 1/10$
(f) $f(x) = x^4$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{-10}$

6. Wskaż taką liczbę M, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)| \le M\ .$$

(a)
$$f(x) = \frac{2x^4+13x^2+7}{5x^4+x^2+2}$$

(b)
$$f(x) = \frac{5x^4+x^2+2}{2x^4+13x^2+7}$$

(c)
$$f(x) = e^{\sin x}$$

(d)
$$f(x) = \frac{x}{x^4+3}$$

(e)
$$f(x) = \frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$$

14. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

14.1. **Wprowadzenie.** Dana jest funkcja f oraz punkt x należący do dziedziny f wraz z pewnym przedziałem $(x-\delta, x+\delta)$. Pochodną funkcji f w punkcie x nazywamy granicę

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \tag{14.1}$$

o ile ta granica istnieje. W przeciwnym wypadku mówimy, że pochodna nie istnieja w punkcie x. Wprowadzając podstawienie $y = x+h$ możemy pochodną liczyć w podobny sposób

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)\right).$$

Zauważmy, że pochodna w każdym punkcie jest liczbą (równą tangensowi nachylenia stycznej do osi Ox), więc jeśli rozważymy pochodną we wszystkich punktach, w których ona istnieje, to dostaniemy nową funkcję $f'(x)$ z funkcji $f(x)$.

Przykład 14.1
Dla $f(x) = x^2$ policzymy $f'(7)$, a następnie $f'(x)$ dla dowolnego x.

Rozwiązanie. Mamy

$$f'(7) = \lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7} = \lim_{x\to 7}(x+7) = 14.$$

oraz

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

□

Jeśli zdarzy się, że funkcja jest określona w punkcie x i tylko z jednej strony tego punktu (np. $\sqrt{x}$ w $x=0$) lub granica (14.1) istnieje tylko jako granica jednostronna, to mówimy o pochodnych jednostronnych. Tak więc jeśli f jest określona na $[x, x+\delta)$, to jej pochodna prawostronna jest dana wzorem

$$f'(x^+) = \lim_{y\to x^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

o ile ta granica istnieje.

Intuicyjnie pochodna $f'(x)$ mówi o tym jak szybko funkcja rośnie/maleje w punkcie x. Jeśli w pewnym punkcie x pochodna $f'(x)$ wynosi a to oznacza, że funkcja rośnie/maleje tak jak funkcja liniowa $y = ax$. Przy okazji zauważmy, że funkcja liniowa $f(x) = ax$ ma w każdym punkcie pochodną równą a.

Fakt 14.2 (Pochodne podstawowych funkcji)
Niech x będzie zmienną oraz $a \in \mathbb{R}$. Zachodzą następujące wzory:

$$\begin{aligned}
&(x)' = 1,\\
&(x^a)' = ax^{a-1},\\
&(\sin x)' = \cos x,\\
&(\cos x)' = -\sin x,\\
&(\ln x)' = \frac{1}{x},\\
&(e^x)' = e^x.
\end{aligned}$$

Dowód. Pierwszy wzór jest oczywisty. Drugi wzór działa dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ (ujemne, ułamkowe, niewymierne), ale my pokażemy dowód dla $a \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k} = \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{n-1}x^{n-1} + h\,(\ldots)\right) = nx^{n-1}.$$

Przejdźmy do pochodnej sinusa. Ze wzoru na sinus sumy, używając znanych granic trygonometrycznych,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\right) = \cos x.$$

Podobnie postępujemy z cosinusem. Następnie, dla $x > 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h\to 0}\ln\left(\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{x/h}\right)^{1/x} = \ln e^{1/x} = 1/x.$$

I jeszcze:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

□

Twierdzenie 14.3 (Arytmetyka pochodnych)
Niech f i g będą dwiema funkcjami różniczkowalnymi, a c stałą rzeczywistą.

1.
$$(cf(x))' = cf'(x),$$

2.
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

3.
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

4.
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2},$$

5.
$$(g(f(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Poniższy fakt zbiera wiele ważnych zastosowań pochodnej. Zanim go sformułujemy zauważmy jeszcze, że $f'(x)$ na każdym odcinku, na którym jest zdefiniowana jest funkcją, której pochodną również można policzyć (jeśli istnieje). W ten sposób mamy zdebiniowaną drugą pochodną $f''(x)$ (i dalsze, które oznaczamy $f^{(n)}(x)$). I jeszcze kilka definicji:

- *punktem ekstremalnym* nazywamy punkt x, w którym $f'(x) = 0$,
- *maximum (minimum) lokalnym* nazywamy punkt x_0, taki że $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) dla x-ów z pewnego otoczenia x_0 (czyli przedziału $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ i $\varepsilon > 0$),
- *ekstremum lokalnym* nazywamy punkt, który jest maximum lokalnym lub minimum lokalnym.

Fakt 14.4 (Własności pochodnych)
Zakładamy, że f jest funkcją zdefiniowaną na odcinku otwartym (lub sumie odcinków).

1. Funkcja różniczkowalna jest ciągła.

2. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_0 zadana jest równaniem

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

3. Jeśli $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$), to funkcja f jest rosnąca (niemalejąca).

4. Jeśli $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leq 0$), to funkcja f jest malejąca (nierosnąca).

5. Jeśli $f'(x) = g'(x)$ na odcinku (a, b), to $f(x) = g(x) + c$ na tym odcinku.

6. Jeśli funkcja ma ekstremum lokalne w punkcie x_0, to x_0 jest punktem krytycznym ($f'(x_0) = 0$).

7. Jeśli $f''(x) > 0$ ($f''(x) \geq 0$), to funkcja f jest ściśle wypukła (wypukła).

8. Jeśli $f''(x) < 0$ ($f''(x) \leq 0$), to funkcja f jest ściśle wklęsła (wklęsła).

Jest naturalne, że punkty ekstremalne i punkty krytyczne są szczególnie interesujące. Pozwala to między innymi poznać przybliżony przebieg funkcji i rozwiązywać zagadnienia optymalizacyjne. Rozdział ten zakończymy jeszcze dwoma ważnymi twierdzeniami.

Twierdzenie 14.5 (Twierdzenie Rolle'a)
Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą mającą pochodną w każdym punkcie przedziału (a, b) oraz $f(a) = f(b)$. Wtedy istnieje $t \in (a, b)$, takie że

$$f'(t) = 0.$$

Dowód. Załóżmy, że f spełnia założenia twierdzenia oraz, że nie jest stała. Wiemy, że funkcja ciągła na odcinku domkniętym $[a, b]$ przyjmuje swoje maksimum i minimum w pewnych punktach. Przynajmniej jedno z tych dwóch ekstremów musi być poza końcami, załóżmy bez straty ogólności, że maksimum jest w punkcie $t \in (a, b)$. Wiemy, że pochodna $f'(t)$ istnieje, więc granica

$$\lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = C$$

dla pewnej liczby C. Skoro t jest punktem maksimum, to zawsze $f(x) - f(t) \leq 0$. Rozważmy teraz tylko $x > t$. Dla takich x iloraz różnicowy jest niedodatni, więc i pochodna prawostronna jest niedodatnia. Podobnie, rozważając $x < t$, pochodna lewostronna jest nieujemna. Ale przecież pochodna istnieje, więc musi być $f'(t) = 0$. □

Twierdzenie 14.6 (Twierdzenie Lagrange'a)
Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą mającą pochodną w każdym punkcie przedziału (a, b). Wtedy istnieje $t \in (a, b)$, takie że

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję pomocniczą

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ta funkcja spełnia założenia twierdzenia Rolle'a (jest ciągła na $[a, b]$ oraz różniczkowalna na (a, b)) oraz $g(a) = g(b)$ (sprawdź). Zatem istnieje $t \in (a, b)$ takie, że $g'(t) = 0$. Teraz wystarczy zauważyć, że dla $x \in (a, b)$ mamy

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

co daje tezę twierdzenia w punkcie t. □

14.2. **Lista zadań.**

1. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając **z definicji** pochodnej obliczyć $f'(8)$.

2. Niech $f(x) = x^5$. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.

3. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ .$$

4. Oblicz pochodną funkcji o podanym wzorze. Na jakim zbiorze pochodna istnieje?

(a) $$x^7 + x^6 - 3x^3 + 4x^2 + 5x + \pi,$$

(b) $$\frac{x^2+1}{x^2-3},$$

(c) $$\frac{1-x^3}{1+x^3},$$

(d) $$(x^5+1)^{20},$$

(e) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}},$$

(f) $$\operatorname{sgn}(x^5 - x^3),$$

(g) $$\ln(\cos(x))$$

(h) $$e^{x^3},$$

(i) $$2^x + 3^x + e^x,$$

(j) $$2^{x+3},$$

(k) $$x^2(x+1)e^x,$$

(l) $$e^{e^x},$$

(m) $$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10},$$

(n) $$\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

5. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (0,1)$.

6. Równanie $x^2 + y^2 = 5$ opisuje okrąg o promieniu $\sqrt{5}$. Znajdź równanie stycznej do tego okręgu w punktach $(1,2)$ oraz $(-2,1)$.

7. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3$, która przecina oś Ox w jednym punkcie: $(-4,0)$.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0.$$

9. Wyprowadź wzór na pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{7+\sin^4 x - \sin^2 x}{7 + \cos^4 x - \cos^2 x}\ .$$

Doprowadzić wzór na pochodną do możliwie najprostszej postaci.

10. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+2xe^x - e^{2x}}{x^3} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

11. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $x^3 + 3|x| + 2$ na przedziale $[-1, 1]$.

12. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $\frac{2x}{x^2+1}$ na przedziale $[-2, 2]$.

13. Wyznacz punkty na sinusoidzie, w których funkcja zmienia się z wypukłej na wklęsłą.

14. Zbadaj wypukłość funkcji

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

15. Wykaż nierówności

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \neq 0).$$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x > 0).$$

$$e^x \geq \left(\frac{ex}{n}\right)^n \quad (x \geq 0).$$

16. Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy 1:2 oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

17. Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

18. Jakie powinny być wymiary puszki w kształcie walca o pojemności 108π, aby do jej produkcji zużyć jak najmniej blachy? Grubość blachy należy zaniedbać.

19. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

20. Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

21. Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π. Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

22. Niech R będzie prostokątem leżącym w pierwszej ćwiartce, którego podstawa leży na osi OX, jeden z wierzchołków znajduje się w początku układu, a przeciwny wierzchołek leży na wykresie funkcji $y = e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ pole R jest mniejsze niż ε, jeśli podstawa prostokąta jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że prostokąt o największym możliwym polu ma podstawę równą 1.

23. Trójkąt prostokątny T leży w pierwszej ćwiartce. Przyprostokątne znajdują się na osiach, a przeciwprostokątna jest styczna do wykresu $y = e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla $\varepsilon > 0$ pole trójkąta T jest mniejsze niż ε jeśli podstawa jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że podstawa trójkąta o największym polu jest równa 2.

24. Załóżmy, że $|f'(x)| \leq M$ dla $x \in (a, b)$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a pokaż, że $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$, czyli

$$f(a) - M(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a).$$

25. Korzystając z poprzedniego zadania oszacuj liczby: $\sqrt{101}$, $28^{2/3}$, $33^{1/5}$.

---

26. Dla jakich wartości parametru a parabola $y = ax^2$ jest styczna do krzywej $y = \ln x$.

27. Podać (z wyprowadzeniem i uzasadnieniem poprawności) przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że funkcja $f(x) = W(\{x\})$ jest różniczkowalna.

28. Liczby rzeczywiste $c_0, c_1, ..., c_n$ spełniają zależność

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + ... + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$

Pokaż, że wielomian $c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek pomiędzy 0 i 1.

29. Załóżmy, że wielomian $P(x)$ stopnia n ma maksymalnie dużo, czyli n pierwiastków rzeczywistych. Pokaż, że pochodne P też mają tę własność.

30. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i sporządź wykres

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$
