

KOŁOKWIUM PRÓBNE - ANALIZA II

Kolokwium próbne - Analiza II

1. Obliczyć poniższą granicę przy pomocy całki Riemmana odpowiedniej funkcji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\sqrt{k^2 + n^2}}{n^3}.$$

2. Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \sin(\ln t) dt.$$

3. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-\infty}^{-\ln \sqrt{2}} \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx.$$

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \cos(2x) \sin^3 x dx.$$

5. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej

$$\frac{6x^3 + 3x^2 + 2x + 6}{x^2(x^2 + 2)}.$$

6. Pokazać nierówności

$$0 \leq \int_{2020\pi}^{202020\pi} \frac{\pi}{\pi + x} \cos x dx \leq \frac{1}{2021}.$$

7. Obliczyć długość krzywej zadanej we współrzędnych biegunowych wzorem

$$r(\phi) = \phi^2, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

8. Funkcja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i parzysta. Udowodnić, że istnieje ciąg wielomianów parzystych $(p_n(x) = p_n(-x))$ zbieżny jednostajnie do f na $[-1, 1]$.

9. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{(x^2 + 1) \sin \sqrt{x}}{e^x - 1} dx.$$

10. Funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, dodatnia i malejąca oraz spełnia

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 f(n^3) < \infty.$$

Pokazać, że całka

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna.