Charakteryzacja operatorami Riesza przestrzeni Hardy'ego związanej z pewnymi rozwinięciami Laguerra

Marcin Preisner

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

16.12.2009 r.

Operator Bessela

Dla ustalonego parametru $a > 0$ rozważamy przestrzeń miarową $X = (0, \infty)$, gdzie $d\mu(x) = x^a dx$.

Operator Bessela

Dla ustalonego parametru $a > 0$ rozważamy przestrzeń miarową $X = (0, \infty)$, gdzie $d\mu(x) = x^a dx$.

Operator Bessela

$$\widetilde{L}f(x) = -\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{a}{x}\frac{d}{dx}f(x), \quad x > 0$$

ma jedyne przedłużenie samosprzężone z $C_c^\infty(0, \infty)$ na gęstą podprzestrzeń $L^2(X)$ (nadal oznaczane $\widetilde{L}$).

Operator Bessela

Dla ustalonego parametru $a > 0$ rozważamy przestrzeń miarową $X = (0, \infty)$, gdzie $d\mu(x) = x^a dx$.

Operator Bessela

$$\widetilde{L}f(x) = -\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{a}{x}\frac{d}{dx}f(x), \quad x > 0$$

ma jedyne przedłużenie samosprzężone z $C_c^\infty(0,\infty)$ na gęstą podprzestrzeń $L^2(X)$ (nadal oznaczane $\widetilde{L}$).

Półgrupa $T_t = e^{-t\widetilde{L}}$ generowana przez operator $\widetilde{L}$ jest zadana przez

$$\widetilde{T}_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \widetilde{T}_t(x,y) f(y) d\mu(y), \quad (x > 0),$$

$$\widetilde{T}_t(x,y) = (2t)^{-1} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) I_{(a-1)/2}\left(\frac{xy}{2t}\right)(xy)^{-(a-1)/2}.$$

Operator Laguerre'a

Na tej samej przestrzeni miarowej $X = \{(0, \infty), \mu\}$ dany jest operator Laguerre'a

Operator Laguerre'a

Na tej samej przestrzeni miarowej $X = \{(0,\infty),\mu\}$ dany jest operator Laguerre'a

$$Lf(x) = -\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{a}{x}\frac{d}{dx}f(x) + x^2 f(x), \quad (x > 0)$$

również z rozszerzeniem samosprzężonym na gęstą podprzestrzeń $L^2(X)$.

Operator Laguerre'a

Na tej samej przestrzeni miarowej $X = \{(0,\infty),\mu\}$ dany jest operator Laguerre'a

$$Lf(x) = -\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{a}{x}\frac{d}{dx}f(x) + x^2 f(x), \quad (x > 0)$$

również z rozszerzeniem samosprzężonym na gęstą podprzestrzeń $L^2(X)$.

Podobnie jak w przypadku operatora Bessela generuje on półgrupę e^{-tL} zadaną przez

$$T_t f(x) = \int_0^\infty T_t(x,y) f(y)\,d\mu(y),$$

$$T_t(x,y) = \frac{2e^{-2t}(xy)^{-(a-1)/2}}{(1-e^{-4t})}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}(x^2+y^2)\right) I_{(a-1)/2}\left(\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-4t}}xy\right).$$

Transformaty Riesza na $L^1(X)$

Ustalmy $f \in L^1(X)$. Odpowiednikiem klasycznej transformaty Riesza w tym wypadku są (formalnie):

$$\widetilde{R}f = \frac{d}{dx}\widetilde{L}^{-1/2}f \quad oraz \quad Rf = \left(\frac{d}{dx} + x\right) L^{-1/2}.$$

Transformaty Riesza na $L^1(X)$

Ustalmy $f \in L^1(X)$. Odpowiednikiem klasycznej transformaty Riesza w tym wypadku są (formalnie):

$$\widetilde{R}f = \frac{d}{dx}\widetilde{L}^{-1/2}f \quad oraz \quad Rf = \left(\frac{d}{dx} + x\right) L^{-1/2}.$$

Używając wzoru $\sqrt{\pi}A^{-1/2} = \int_0^\infty e^{-tA}\frac{dt}{\sqrt{t}}$ możemy transformaty Riesza zdefiniować następująco:

$$\widetilde{R}f = \int_0^\infty \frac{d}{dx}\widetilde{T}_t f \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

$$Rf = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dx} + x\right) T_t f \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Transformaty Riesza na $L^1(X)$

Ustalmy $f \in L^1(X)$. Odpowiednikiem klasycznej transformaty Riesza w tym wypadku są (formalnie):

$$\widetilde{R}f = \frac{d}{dx}\widetilde{L}^{-1/2}f \quad oraz \quad Rf = \left(\frac{d}{dx} + x\right) L^{-1/2}.$$

Używając wzoru $\sqrt{\pi}A^{-1/2} = \int_0^\infty e^{-tA}\frac{dt}{\sqrt{t}}$ możemy transformaty Riesza zdefiniować następująco:

$$\widetilde{R}f = \int_0^\infty \frac{d}{dx}\widetilde{T}_t f \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

$$Rf = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dx} + x\right) T_t f \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Powyższa definicja wymaga doprecyzowania, ponieważ powyższe operatory są singularne. Można to zrobić pokazując, że funkcje $R_\varepsilon f = \int_\varepsilon^{\varepsilon^{-1}} \frac{d}{dx} T_t f \frac{dt}{\sqrt{t}}$ należące do $L^1(X)$ mają granicę (dystrybucyjną) lub pokazać, że jądro $R(x,y) = \int_0^\infty \frac{d}{dx} T_t(x,y)\frac{dt}{\sqrt{t}}$ zadaje dla $f \in L^1(X)$ operator 'części głównej' - PV (również dystrybucyjnie).

Jądro Riesza związanego z operatorem Bessla

Oznaczmy stałe

$$A = A(a) = -\frac{2\Gamma(1+a/2)}{\Gamma((1+a)/2)} = -\frac{2\gamma_1}{\gamma_2}, \qquad B = B(a) = -\frac{a+1}{\sqrt{\pi}}.$$

oraz L^1-dylatacje $h_y(x) = y^{-a-1}h(x/y)$. Następujący lemat opisuje jądro Riesza związane z operatorem Bessela.

Oznaczmy stałe

$$A = A(a) = -\frac{2\Gamma(1+a/2)}{\Gamma((1+a)/2)} = -\frac{2\gamma_1}{\gamma_2}, \qquad B = B(a) = -\frac{a+1}{\sqrt{\pi}}.$$

oraz L^1-dylatacje $h_y(x) = y^{-a-1}h(x/y)$. Następujący lemat opisuje jądro Riesza związane z operatorem Bessela.

Lemat

Niech A, B będą jak wyżej. Wtedy dla $x \neq y$ mamy

$$\widetilde{R}(x,y) = \frac{A-B}{x^{a+1}+y^{a+1}} + \frac{B}{x^{a+1}-y^{a+1}} + h_y(x),$$

gdzie

$$h \in L^1(X) \quad \text{and} \quad |h(x) - A + 2B| \leq Cx \quad \text{for } x \leq 1.$$

Szkic dowodu

Uzywając znanych wzorów na różniczkowanie i przesunięcie w argumencie funkcji Bessela dostajemy

Szkic dowodu

Uzywając znanych wzorów na różniczkowanie i przesunięcie w argumencie funkcji Bessela dostajemy

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}(x,1) = &-\int_0^\infty (2t)^{-2}\exp\left(-\frac{x^2+1}{4t}\right)x^{-(\alpha-3)/2}I_{(\alpha-1)/2}\left(\frac{x}{2t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}}\\
&+\int_0^\infty (2t)^{-2}\exp\left(-\frac{x^2+1}{4t}\right)x^{-(\alpha-1)/2}I_{(\alpha+1)/2}\left(\frac{x}{2t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}}\\
=& \int_0^\infty \widetilde{R}_1(x;t)dt + \int_0^\infty \widetilde{R}_2(x;t)dt
\end{aligned}
$$

Szkic dowodu

Używając znanych wzorów na różniczkowanie i przesunięcie w argumencie funkcji Bessela dostajemy

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(x,1) &= -\int_0^\infty (2t)^{-2}\exp\left(-\frac{x^2+1}{4t}\right)x^{-(\alpha-3)/2} I_{(\alpha-1)/2}\left(\frac{x}{2t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&\quad + \int_0^\infty (2t)^{-2}\exp\left(-\frac{x^2+1}{4t}\right)x^{-(\alpha-1)/2} I_{(\alpha+1)/2}\left(\frac{x}{2t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \int_0^\infty \widetilde{R}_1(x;t)dt + \int_0^\infty \widetilde{R}_2(x;t)dt
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d}{dx}T_t(x,1)\frac{dt}{\sqrt{t}} &= -(x-1)\int_0^\infty (2t)^{-2}\exp\left(-\frac{x^2+1}{4t}\right)x^{-\frac{\alpha-1}{2}} I_{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\frac{x}{2t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&\quad + \int_0^\infty (2t)^{-2}\exp\left(-\frac{x^2+1}{4t}\right)x^{-\frac{\alpha-1}{2}}\left(I_{\frac{\alpha+1}{2}} - I_{\frac{\alpha-1}{2}}\right)\left(\frac{x}{2t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \int_0^\infty R_3(x;t)dt + \int_0^\infty R_4(x;t)dt.
\end{aligned}$$

Szkic dowodu, c.d.

Analizę dzielimy na 3 przypadki:

- $0 < x < 1/2$ - korzystamy z pierwszego rozkładu,
- $1/2 < x < 3/2$ - korzystamy z drugiego rozkładu,
- $3/2 < x < \infty$ - korzystamy z pierwszego rozkładu.

Szkic dowodu, c.d.

Analizę dzielimy na 3 przypadki:

- $0 < x < 1/2$ - korzystamy z pierwszego rozkładu,
- $1/2 < x < 3/2$ - korzystamy z drugiego rozkładu,
- $3/2 < x < \infty$ - korzystamy z pierwszego rozkładu.

Przykład: $x > 3/2$...

Szkic dowodu, c.d.

Analizę dzielimy na 3 przypadki:

- $0 < x < 1/2$ - korzystamy z pierwszego rozkładu,
- $1/2 < x < 3/2$ - korzystamy z drugiego rozkładu,
- $3/2 < x < \infty$ - korzystamy z pierwszego rozkładu.

Przykład: $x > 3/2$...

Definiujemy $h(x) = \widetilde{R}(x,1) - \frac{A-B}{x^{a+1}+1} - \frac{B}{x^{a+1}-1}$. Z oszacowań wynikają własności:

$$h \in L^1(X), \qquad h(x) = A - 2B + O(x) \quad (x \sim 0).$$

Szkic dowodu, c.d.

Analizę dzielimy na 3 przypadki:

- $0 < x < 1/2$ - korzystamy z pierwszego rozkładu,
- $1/2 < x < 3/2$ - korzystamy z drugiego rozkładu,
- $3/2 < x < \infty$ - korzystamy z pierwszego rozkładu.

Przykład: $x > 3/2$...

Definiujemy $h(x) = \widetilde{R}(x,1) - \frac{A-B}{x^{a+1}+1} - \frac{B}{x^{a+1}-1}$. Z oszacowań wynikają własności:

$$h \in L^1(X), \qquad h(x) = A - 2B + O(x) \quad (x \sim 0).$$

Dla dowolnego $y > 0$ teza lematu wynika z jednorodności...

$$\widetilde{R}(x,y) = y^{-a-1}\widetilde{R}\left(\frac{x}{y}, 1\right).$$

Jądro Riesza związanego z operatorem Laguerre'a

Definiujemy funkcję

$$\rho(y) = \chi_{(0,1)}(y) + \frac{1}{y}\chi_{[1,\infty)}(y).$$

Jądro Riesza związanego z operatorem Laguerre'a

Definiujemy funkcję

$$\rho(y) = \chi_{(0,1)}(y) + \frac{1}{y}\chi_{[1,\infty)}(y).$$

Niech ϕ będzie funkcją wycinającą, tzn.

$$\phi \in C_c^\infty(-2,2), \qquad \phi(x) = 1 \text{ for } |x| \leq 3/2.$$

Jądro Riesza związanego z operatorem Laguerre'a

Definiujemy funkcję

$$\rho(y) = \chi_{(0,1)}(y) + \frac{1}{y}\chi_{[1,\infty)}(y).$$

Niech ϕ będzie funkcją wycinającą, tzn.

$$\phi \in C_c^\infty(-2,2), \qquad \phi(x) = 1 \text{ for } |x| \leq 3/2.$$

Lemat

Niech A i B będą stałymi zdefiniowanymi poprzednio. Jądro $R(x,y)$ można zapisać w postaci

$$R(x,y) = \phi\left(\frac{x-y}{\rho(y)}\right)\left(\frac{B}{x^{a+1}-y^{a+1}} + \frac{(A-B)}{x^{a+1}+y^{a+1}}\right) + g(x,y),$$

gdzie

$$\sup_{y>0}\int_0^\infty |g(x,y)|d\mu(x) < \infty.$$

Szkic dowodu

Podobnie jak wcześniej liczymy pochodną półgrupy i zapisujemy jądro $R(x,y)$ w dwóch wersjach ($\theta = \frac{2e^{-2t}}{1-e^{-4t}}xy$):

$$R(x,y) = \int_0^\infty T^{[1]}(x,y)\frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty T^{[2]}(x,y)\frac{dt}{\sqrt{t}}$$
$$= \int_0^\infty T^{[3]}(x,y)\frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty T^{[4]}(x,y)\frac{dt}{\sqrt{t}},$$

Szkic dowodu

Podobnie jak wcześniej liczymy pochodną półgrupy i zapisujemy jądro $R(x,y)$ w dwóch wersjach ($\theta = \frac{2e^{-2t}}{1-e^{-4t}}xy$):

$$
\begin{aligned}
R(x,y) &= \int_0^\infty T^{[1]}(x,y)\frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty T^{[2]}(x,y)\frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \int_0^\infty T^{[3]}(x,y)\frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty T^{[4]}(x,y)\frac{dt}{\sqrt{t}},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
T_t^{[1]}(x,y) &= \left(\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-4t}}\right)^2 y(xy)^{-\frac{a-1}{2}} \exp\left(-\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}\frac{x^2+y^2}{2}\right) I_{\frac{a+1}{2}}(\theta); \\
T_t^{[2]}(x,y) &= -\frac{2e^{-2t}(1+e^{-4t})}{(1-e^{-4t})^2} x(xy)^{-\frac{a-1}{2}} \exp\left(-\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}\frac{x^2+y^2}{2}\right) I_{\frac{a-1}{2}}(\theta); \\
T_t^{[3]}(x,y) &= -\frac{2e^{-2t}(1+e^{-4t})}{(1-e^{-4t})^2} (xy)^{-\frac{a-1}{2}} (x-y) \exp\left(-\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}\frac{x^2+y^2}{2}\right) I_{\frac{a-1}{2}}(\theta \\
T_t^{[4]}(x,y) &= \frac{2e^{-2t}}{1-e^{-4t}} y(xy)^{-\frac{a-1}{2}} \exp\left(-\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}\frac{x^2+y^2}{2}\right) \\
&\quad \left(\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-4t}} I_{\frac{a+1}{2}}(\theta) - \frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}} I_{\frac{a-1}{2}}(\theta)\right).
\end{aligned}
$$

Szkic dowodu, c.d.

Analizę dzielimy na przypadki $x < y/2$, $y/2 < x < 2y$, $x > 2y$ (w środkowym stosujemy drugi rozkład). Dodatkowo osobno badamy $x, y < 1$, $\max(x, y) > 1$.

Szkic dowodu, c.d.

Analizę dzielimy na przypadki $x < y/2$, $y/2 < x < 2y$, $x > 2y$ (w środkowym stosujemy drugi rozkład). Dodatkowo osobno badamy $x, y < 1$, $\max(x, y) > 1$.

Istotna okazuje się zamiana

$$\exp\left(-\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}\frac{x^2+y^2}{2}\right) I_{(a+1)/2}\left(\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-4t}}xy\right)\left(\frac{2e^{-2t}xy}{1-e^{-4t}}\right)^{1/2}$$
$$= \exp\left(-\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}\frac{(x-y)^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{(1-e^{-2t})^2}{1-e^{-4t}}xy\right) U_{(a+1)/2}\left(\frac{2e^{-2t}xy}{1-e^{-4t}}\right),$$

Szkic dowodu, c.d.

Analizę dzielimy na przypadki $x < y/2$, $y/2 < x < 2y$, $x > 2y$ (w środkowym stosujemy drugi rozkład). Dodatkowo osobno badamy $x, y < 1$, $\max(x, y) > 1$.

Istotna okazuje się zamiana

$$\exp\left(-\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}\frac{x^2+y^2}{2}\right) I_{(a+1)/2}\left(\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-4t}}xy\right)\left(\frac{2e^{-2t}xy}{1-e^{-4t}}\right)^{1/2}$$
$$= \exp\left(-\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}\frac{(x-y)^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{(1-e^{-2t})^2}{1-e^{-4t}}xy\right) U_{(a+1)/2}\left(\frac{2e^{-2t}xy}{1-e^{-4t}}\right),$$

gdzie

$$U_\alpha(x) = I_\alpha(x)\sqrt{x}e^{-x} = (2\pi)^{-1/2} + O(1/x), \qquad x \sim \infty.$$

Definicje dystrybucyjne

Za zbiór funkcji testowych przyjmujemy

$$\Omega(X) = \left\{ \psi \in C^\infty(0,\infty) \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \;\; \|x^n \psi^{(k)}(x)\|_\infty < \infty \right\}.$$

Działanie funkcji $f \in L^p(X)$ na funkcji testowej jest zdefiniowane naturalnie, tzn. $< f, \psi >= \int_0^\infty f\psi \, d\mu$.

Definicje dystrybucyjne

Za zbiór funkcji testowych przyjmujemy

$$\Omega(X)=\left\{\psi\in C^{\infty}(0,\infty)\ \middle|\ \forall n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\ \ \|x^n\psi^{(k)}(x)\|_{\infty}<\infty\right\}.$$

Działanie funkcji $f\in L^p(X)$ na funkcji testowej jest zdefiniowane naturalnie, tzn. $< f,\psi >=\int_0^\infty f\psi\,d\mu$.

Dla $f\in L^1(X)$, $\psi\in\Omega(X)$ definiujemy

$$<\widetilde{R}f,\psi>=<f,\widetilde{R}^*\psi>, \qquad \widetilde{R}^*\psi(y)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\widetilde{R}(x,y)\psi(x)d\mu(x).$$

Alternatywnie możemy również przedstawić $\widetilde{R}f$ jako granicę funkcji z $L^1(X)$:

$$<\widetilde{\mathcal{R}}f,\psi>=\lim_{\varepsilon\to 0}<\int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}}\frac{d}{dx}\widetilde{T}_t f\frac{dt}{\sqrt{t}},\ \psi>.$$

Definicje dystrybucyjne

Za zbiór funkcji testowych przyjmujemy

$$\Omega(X) = \left\{ \psi \in C^\infty(0,\infty) \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \;\; \| x^n \psi^{(k)}(x) \|_\infty < \infty \right\}.$$

Działanie funkcji $f \in L^p(X)$ na funkcji testowej jest zdefiniowane naturalnie, tzn. $< f, \psi >= \int_0^\infty f \psi \, d\mu$.

Dla $f \in L^1(X)$, $\psi \in \Omega(X)$ definiujemy

$$< \widetilde{R} f, \psi > = < f, \widetilde{R}^* \psi >, \qquad \widetilde{R}^* \psi(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \widetilde{R}(x,y) \psi(x) d\mu(x).$$

Alternatywnie możemy również przedstawić $\widetilde{R} f$ jako granicę funkcji z $L^1(X)$:

$$< \widetilde{\mathcal{R}} f, \psi > = \lim_{\varepsilon \to 0} < \int_\varepsilon^{\varepsilon^{-1}} \frac{d}{dx} \widetilde{T}_t f \frac{dt}{\sqrt{t}}, \; \psi > .$$

Oba powyższe wzory definiują tę samą dystrybucje. W dodatku

$$\| \widetilde{\mathcal{R}}^* \psi \|_\infty + \| \widetilde{R}^* \psi \|_\infty \le C_\psi .$$

Definicje dystrybucyjne (c.d.)

W konteście rozwinięcia Laguerre'a jest podobnie. Dla $f \in L^1(X)$, $\psi \in \Omega(X)$,

$$< Rf, \psi >=< f, R^* \psi >, \qquad R^* \psi(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} R(x,y)\psi(x) d\mu(x).$$

Definicje dystrybucyjne (c.d.)

W konteście rozwinięcia Laguerre'a jest podobnie. Dla $f \in L^1(X)$, $\psi \in \Omega(X)$,

$$< Rf, \psi > = < f, R^* \psi >, \qquad R^*\psi(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} R(x,y)\psi(x)d\mu(x).$$

Powyższy wzór prawidłowo definiuje dystrybucję oraz

$$\|R^*\psi\|_\infty \leq C_\psi.$$

Przestrzeń Hardyego $\widetilde{H}^1(X)$ związana z operatorem Bessela

W pracy

- J.J. Betancor, J. Dziubański, J.L. Torrea, *On Hardy spaces associated with Bessel operators*, J. Anal. Math. 107 (2009), 195–219.

została opisana przestrzeń Hardy'ego $\widetilde{H}^1(X)$ poprzez następujące twierdzenie:

Przestrzeń Hardyego $\widetilde{H}^1(X)$ związana z operatorem Bessela

W pracy

• J.J. Betancor, J. Dziubański, J.L. Torrea, *On Hardy spaces associated with Bessel operators*, J. Anal. Math. 107 (2009), 195–219.

została opisana przestrzeń Hardy'ego $\widetilde{H}^1(X)$ poprzez następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Dla $f \in L^1(X)$ następujące warunki są równoważne

$$f \in \widetilde{H}^1_{at}(X) \iff \widetilde{R}f \in L^1(X) \iff \sup_{t>0} |\widetilde{T}_t f| \in L^1(X).$$

Ponadto

$$\|f\|_{\widetilde{H}^1_{at}(X)} \sim \left(\|f\|_{L^1(X)} + \|\widetilde{R}f\|_{L^1(X)}\right) \sim \left\| \sup_{t>0} |\widetilde{T}_t f| \right\|_{L^1(X)}.$$

Rokład atomowy $\widetilde{H}^1(X)$.

Atomem przestrzeni $\widetilde{H}^1_{at}(X)$ nazywamy funkcje a spełniającą warunki:

Definicja

(i) $\operatorname{supp}(a) \subseteq I \subseteq (0, \infty)$ *dla pewnego przedziału* I,

(ii) $\|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1}$,

(iii) $\int_0^\infty a(x) d\mu(x) = 0$.

Rokład atomowy $\widetilde{H}^1(X)$.

Atomem przestrzeni $\widetilde{H}^1_{at}(X)$ nazywamy funkcje a spełniającą warunki:

Definicja

(i) $\operatorname{supp}(a) \subseteq I \subseteq (0, \infty)$ *dla pewnego przedziału* I,

(ii) $\|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1}$,

(iii) $\int_0^\infty a(x) d\mu(x) = 0$.

Z definicji, $f \in \widetilde{H}^1_{at}(X)$, gdy $f = \sum_j \lambda_j a_j$, gdzie λ_j są skalarami, natomiast a_j atomami, przy czym: $\sum_j |\lambda_j| < \infty$.

Rokład atomowy $\widetilde{H}^1(X)$.

Atomem przestrzeni $\widetilde{H}^1_{at}(X)$ nazywamy funkcje a spełniającą warunki:

Definicja

(i) $\operatorname{supp}(a) \subseteq I \subseteq (0, \infty)$ *dla pewnego przedziału* I,

(ii) $\|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1}$,

(iii) $\int_0^\infty a(x) d\mu(x) = 0$.

Z definicji, $f \in \widetilde{H}^1_{at}(X)$, gdy $f = \sum_j \lambda_j a_j$, gdzie λ_j są skalarami, natomiast a_j atomami, przy czym: $\sum_j |\lambda_j| < \infty$.

Normę tej przestrzeni Banacha zadajemy przez

$$\|f\|_{\widetilde{H}^1_{at}(X)} = \inf \sum_j |\lambda_j|,$$

gdzie infimum jest wzięte po powyższych rozkładach.

Lokalna przestrzeń Hardyego $\widetilde{h}^{1,m}(X)$ związana z operatorem Bessela

Przestrzeń Hardy'ego $H^1(X)$ dla operatora Laguerre'a będziemy porównywać ze (''znaną'') przestrzenią $\widetilde{H}^1(X)$ związaną z operatorem Bessela. Dokładniej, z lokalną, przeskalowaną przestrzenią Hardy'ego $\widetilde{h}^{1,m}(X)$, której definicję i opis zamieszczamy poniżej.

Lokalna przestrzeń Hardyego $\widetilde{h}^{1,m}(X)$ związana z operatorem Bessela

Przestrzeń Hardy'ego $H^1(X)$ dla operatora Laguerre'a będziemy porównywać ze ("znaną") przestrzenią $\widetilde{H}^1(X)$ związaną z operatorem Bessela. Dokładniej, z lokalną, przeskalowaną przestrzenią Hardy'ego $\widetilde{h}^{1,m}(X)$, której definicję i opis zamieszczamy poniżej.

Niech ϕ będzie funkcją wycinającą zdefiniowaną wcześniej. Wtedy

$$<\widetilde{r}^m f, \psi> = < f, (\widetilde{r}^m)^* \psi>, \quad (\widetilde{r}^m)^* \psi(x) = P.V. \int_0^\infty \widetilde{R}(x,y) \phi\left(\frac{x-y}{m}\right) \psi(x) d\mu(x)$$

jest dobrze zdefiniowane i spełnia $\|(\widetilde{r}^m)^* \psi\|_\infty \leq C_{\psi,m}$.

Lokalna przestrzeń Hardyego $\widetilde{h}^{1,m}(X)$ związana z operatorem Bessela

Przestrzeń Hardy'ego $H^1(X)$ dla operatora Laguerre'a będziemy porównywać ze ("znaną") przestrzenią $\widetilde{H}^1(X)$ związaną z operatorem Bessela. Dokładniej, z lokalną, przeskalowaną przestrzenią Hardy'ego $\widetilde{h}^{1,m}(X)$, której definicję i opis zamieszczamy poniżej.

Niech ϕ będzie funkcją wycinającą zdefiniowaną wcześniej. Wtedy

$$< \widetilde{r}^m f, \psi > = < f, (\widetilde{r}^m)^* \psi >, \quad (\widetilde{r}^m)^* \psi(x) = P.V. \int_0^\infty \widetilde{R}(x,y) \phi\left(\frac{x-y}{m}\right) \psi(x) d\mu(x)$$

jest dobrze zdefiniowane i spełnia $\|(\widetilde{r}^m)^* \psi\|_\infty \leq C_{\psi,m}$.

Lemat

Operatory $\widetilde{r}^m$ są ograniczone na $L^2(X)$ ze stałą niezależną od m.

Opis $\widetilde{h}^{1,m}(X)$

Lokalną przestrzenią Hardy'ego $\widetilde{h}^{1,m}(X)$ nazywamy podprzestrzeń $L^1(X)$ składającą się z funkcji f dla których $\widetilde{r}^m f \in L^1(X)$.

Opis $\widetilde{h}^{1,m}(X)$

Lokalną przestrzenią Hardy'ego $\widetilde{h}^{1,m}(X)$ nazywamy podprzestrzeń $L^1(X)$ składającą się z funkcji f dla których $\widetilde{r}^m f \in L^1(X)$.

Atomem tej przestrzeni nazywamy funkcję a spełniającą:

(i) $\operatorname{supp}(a) \subseteq I = B(y_0, r) \subseteq (0, \infty), r \leq m$,

(ii) $\|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1}$,

(iii) if $r \leq m/4$, then $\int_0^\infty a(x) d\mu(x) = 0$.

Opis $\widetilde{h}^{1,m}(X)$

Lokalną przestrzenią Hardy'ego $\widetilde{h}^{1,m}(X)$ nazywamy podprzestrzeń $L^1(X)$ składającą się z funkcji f dla których $\widetilde{r}^m f \in L^1(X)$.

Atomem tej przestrzeni nazywamy funkcję a spełniającą:

(i) $\operatorname{supp}(a) \subseteq I = B(y_0, r) \subseteq (0, \infty), r \leq m$,

(ii) $\|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1}$,

(iii) if $r \leq m/4$, then $\int_0^\infty a(x) d\mu(x) = 0$.

Twierdzenie

Załóżmy, że $f \in L^1(X)$. Wtedy $\widetilde{r}^m f \in L^1(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\lambda_j \in \mathbb{C}$ oraz a_j będące $\widetilde{h}^{1,m}(X)$-atomami, takie że $f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$, gdzie $\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| < \infty$.
Ponadto, można wybrać $\{\lambda_j\}_j, \{a_j\}_j$, dla których

$$C^{-1} \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| \leq \|f\|_{L^1(X)} + \|\widetilde{r}^m f\|_{L^1(X)} \leq C \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|,$$

gdzie C jest niezależna $m > 0$.
Jeśli w dodatku założymy, że $\operatorname{supp}(f) \subseteq I = B(y_0, r)$, $|I| \leq m$, to można przyjąć, że atomy mają nośniki w $\frac{4}{3} I$.

Atomy dla przestrzeni $H^1(X)$ i główne twierdzenie

Funkcję a nazywamy $H^1(X)-$atomem, gdy:

(i) $\mathrm{supp}(a) \subseteq I \subseteq (0, \infty)$ dla odcinka $I = B(y_0, r)$, $r \leq \rho(y_0)$,

(ii) $\|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1}$,

(iii) if $r \leq \rho(y_0)/4$, then $\int_0^\infty a(x) d\mu(x) = 0$.

Funkcję a nazywamy $H^1(X)-$atomem, gdy:

(i) $\operatorname{supp}(a) \subseteq I \subseteq (0,\infty)$ dla odcinka $I = B(y_0, r),\ r \leq \rho(y_0)$,

(ii) $\|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1}$,

(iii) if $r \leq \rho(y_0)/4$, then $\int_0^\infty a(x)d\mu(x) = 0$.

Przestrzeń atomową $H^1_{at}(X)$ oraz normę $\|\cdot\|_{H^1_{at}(X)}$ definiujemy identycznie, jak wcześniej (jako sumy $\sum_j \lambda_j a_j$ oraz $\inf \sum_j |\lambda_j|$).

Atomy dla przestrzeni $H^1(X)$ i główne twierdzenie

Funkcję a nazywamy $H^1(X)-$atomem, gdy:

(i) $\operatorname{supp}(a) \subseteq I \subseteq (0,\infty)$ dla odcinka $I = B(y_0, r)$, $r \leq \rho(y_0)$,

(ii) $\|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1}$,

(iii) if $r \leq \rho(y_0)/4$, then $\int_0^\infty a(x)d\mu(x) = 0$.

Przestrzeń atomową $H^1_{at}(X)$ oraz normę $\|\cdot\|_{H^1_{at}(X)}$ definiujemy identycznie, jak wcześniej (jako sumy $\sum_j \lambda_j a_j$ oraz $\inf \sum_j |\lambda_j|$).

Twierdzenie (główne)

Funkcja $f \in L^1(X)$ należy do $H^1_{at}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy Rf jest w $L^1(X)$. Ponadto odpowiadające normy są porównywalne, tzn.

$$C^{-1}\|f\|_{H^1_{at}(X)} \leq \|f\|_{L^1(X)} + \|Rf\|_{L^1(X)} \leq C\|f\|_{H^1_{at}(X)}.$$

Dziękuję za uwagę