Uniwersyteckie Kółko Matematyczne - poziom A

www.math.uni.wroc.pl/~preisner/jg

Marcin Preisner, Jelenia Góra, 12 czerwca 2010 r.

Podzielność liczb całkowitych

Tym razem przypomnimy sobie najważniejsze fakty dotyczące podzielności liczb.

Fakt 0.1 (Dzielenie z resztą) *Mając dane dwie liczby naturalne n, k możemy podzielić je przez siebie otrzymując iloraz q i resztę r, przy czym*

$$n = q \cdot k + r \qquad oraz \qquad r \leqslant k - 1.$$

Wynika z stąd, że zwykle badając podzielność przez jakąś liczbę w wyrażeniu lub równaniu wystarczy znać reszty z dzielenia poszczególnych "składników".

1. Znajdź resztę z dzielenia przez 7 liczb: $145 \cdot 19$, $84500 \cdot 497888$.
2. Przez co trzeba podzielić 50, żeby otrzymać resztę 5? Znajdź wszystkie możliwości.
3. Znajdź cyfrę jedności sumy
$$1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7 + 8^8 + 9^9 + 10^{10}.$$
4. Uzasadnij, że jeżeli m i n są liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez 3, to jedna z liczb $mn + 1$, $m - n$ jest podzielna przez 3.
5. Uzasadnij, że liczba $321^6 54 + 123^4 56$ jest podzielna przez 10.

   Fakt 0.2 (Jednoznaczność rozkładu) *Każda liczba naturalna rozkłada się jednoznacznie na iloczyn liczb pierwszych.*

   Jako wniosek wiemy, że jeśli rozłożymy liczbę jako iloczyn liczb pierwszych do pewnych potęg (np. $2^5 \cdot 3^2 \cdot 13$), to podzielność przez tę liczbę oznacza dokładnie podzielność przez poszczególne liczby pierwsze w odpowiednich potęgach. W naszym przykładzie:
   $$2^5 \cdot 3^2 \cdot 13 | n \quad \Longleftrightarrow \quad 2^5 | n \ i \ 3^2 | n \ i \ 13 | n.$$
6. Czy liczbę 1100 można przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb, których największy wspólny dzielnik wynosi 11?
7. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to liczba $n \cdot (n + 3)$ jest podzielna przez 9 lub nie jest podzielna przez 3.
8. Ile dzielników naturalnych mają liczby: 78, 128, $12^1 0$, $2^5 \cdot 3^2 \cdot 13$?
9. Znajdź liczby całkowite k, lim, dla których
$$6^k \cdot 10^l \cdot 15^m = 9^{2000}$$
10. Iloczyn dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 6 jest równy 144. Znajdź te liczby.

Fakt 0.3 *Jeśli dwie liczby a, b są podzielne przez k, to również $a-b, a+b, 2a+3b, \ldots$ są podzielne przez k.*
Jeśli dwie liczby dają tę samą resztę z dzielenia przez k, to ich różnica jest podzielna przez k.

11. Jakie wspólne dzielniki mogą mieć liczby n i $n+6$, jeśli n jest liczbą naturalną?

12. Dane sa takie liczby całkowite k, l, ze liczba $k+2l$ jest podzielna przez 3. Wykaz, że liczba $2k+l$ też jest podzielna przez 3.

13. Dane sa takie liczby całkowite k, l, m, że liczba $2k+3l+4m$ jest podzielna przez 5. Wykaz, ze liczba $k+2m+4l$ też jest podzielna przez 5.

14. Dla jakich n wyrażenie $\frac{3n}{2n-1}$ jest liczbą całkowitą?

    Na koniec kilka innych zadań o podzielności.

15. Wyjaśnij, dlaczego, gdy jedna liczba naturalna jest o połowę większa od drugiej, to ich suma jest podzielna przez 5.

16. Które liczby naturalne można przedstawić w postaci sumy szóstek i sió- demek? (Sumę samych szóstek lub samych siódemek też uważamy za "sumę szóstek i siódemek".)

17. Znajdź dziesięć kolejnych nieparzystych liczb naturalnych, których suma jest podzielna przez 99.

18. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 111, której suma cyfr jest równa 111.