Uniwersyteckie Kółko Matematyczne - poziom C

www.math.uni.wroc.pl/~preisner/jg

Piotr Dyszewski, Jelenia Góra, 19 listopada 2011 r.

Nieelementarne[1] tożsamości

Rozgrzewka

1. Zsumuj
$$\sum_{k=0}^{m} \binom{x+k}{i}$$
gdzie i oraz m są liczbami naturalnymi. Czy możesz nie zakładać, że x jest liczbą całkowitą?

2. Zapisz k^2 jako $a_2\binom{k}{2} + a_1\binom{k}{1} + a_0\binom{k}{0}$. Wykorzystaj to do policzenia $\sum_{k=0}^{n} k^2$

3. Oblicz
$$(a) \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 \quad (b) \quad \sum_{k=0}^{n} k2^k$$

4. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij wzór dwumianowy.
$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$$
gdzie $z^{\underline{m}} = z(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-m+1)$

5. Ciąg Golomba g_1, g_2, g_3... to niemalejący ciąg liczb naturalnych, w którym każda liczba k występuje dokładnie g_k razy. Oto kilka pierwszych wartości:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
g_k	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	

Niech $G(n)$ będzie największą taką liczbą m, że $g_m = n$. Pokaż, że
$$G(n) = \sum_{k=1}^{n} g_k$$
oraz
$$G(G(n)) = \sum_{k=1}^{n} k g_k$$

6. Udowodnij równość
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$$

[1] przynajmniej taką mam nadzieję

Sumy a pochodne

7. Oblicz
$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} \quad (b)\quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^{k-2} \quad (c)\quad \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{m}}x^{k-m}$$
gdzie $k^{\underline{m}} = k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)$

8. Wykorzystaj wyniki z poprzedniego zadania do policzenia:
$$(a)\quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{1}x^k \quad (b)\quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2}x^k \quad (c)\quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m}{m}x^k$$

9. Oblicz
$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}k \qquad (b)\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}k(-1)^k$$
$$(c)\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}k(k-1) \qquad (d)\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k(k-1)$$

10. Udowodnij tożsamości
$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{k}{m}\binom{n}{k} = 2^m 3^{n-m}\binom{n}{m} \quad (b)\quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{n-k}\binom{k}{m}\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n}{m}$$

11. Oblicz następujące sumy
$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n} k\sin kx \quad (b)\quad \sum_{k=0}^{n} k^2\sin kx$$

Tożsamości a szeregi

Przyda nam się formuła mnożenia szeregów. Przypomnijmy ją:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

11. Udowodnij indukcyjnie formułę
$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+m}{m}x^k = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$$

12. Niech n, m i p będą liczbami naturalnymi. Udowodnij, że
$$\sum_{i=0}^{p}\binom{m+i}{m}\cdot\binom{n+p-i}{n} = \binom{n+m+p+1}{p}$$

13. Udowodnij, że
$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{m+1}{i}\binom{m+p-i}{m} = 0$$