Jelenia Góra, 16 marca 2013 r.

UNIWERSYTECKIE KÓŁKO MATEMATYCZNE - POZIOM β

WWW.MATH.UNI.WROC.PL/~PREISNER/JG/

Pochodne - zaawansowane zastosowania

Na tej liście nauczymy się kilku zaawansowanych zastosowań pochodnych. Podstawowe definicje i twierdzenia są już dokładnie wypisane na liście z 8.12.2012, np. własność Darboux, twierdzenie Rolle'a/Lagrange'a/Cauchy'ego, reguły de l'Hospitala. Tutaj zrobimy kilka zadań na podstawie tamtych twierdzeń oraz poznamy kilka nowych.

Własność Darboux.

1. Udowodnij, że każdy wielomian rzeczywisty stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty.
2. Pokaż, że równanie $2x = \sin x + 1$ ma w przedziale $(0, 1)$ co najmniej jedno rozwiązanie.
3. Pokaż, że równanie $x2^x = 1$ ma w przedziale $(0, 1)$ co najmniej jedno rozwiązanie.
4. Pokaż, że dla wielomianu $W(x)$ stopnia 3 istnieje liczba a taka, że wielomian $w(x) - ax$ ma 3 miejsca zerowe.
5. Pokazać, że wielomian $P(x) = x^3 - 3x + 1$ posiada trzy pierwiastki rzeczywiste.
6. Stosując własność Darboux wyznaczyć rozwiązanie równania $x^3 = 3$ z dokładnością do $1/16$.

Reguły de l'Hospitala.

1. Oblicz granice:
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$,
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$,
   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$,
   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$,
   (f) $\lim_{x\to 0} (\sin x)^{\sin x}$,
   (g) $\lim_{x\to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$,
   (h) $\lim_{x\to \infty} (1 + x)^{1/x}$.
2. Udowodnij, ze funkcja $\{x\}^{\{x\}}$ jest ciągła.
3. Sprawdź efekt zastosowania reguły de l'Hospitala do granicy $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$. Oblicz granicę $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n}$.
4. Sprawdź efekt zastosowania reguły de l'Hospitala do granicy $\lim_{x\to \infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}$. Oblicz te granicę.

---

materiały przygotował: Marcin Preisner (preisner@math.uni.wroc.pl).

Różne.

1. Wykaż, że dla $x, y > 0$, $x \neq y$:
$$\min(x, y) < \frac{x - y}{\ln x - \ln y} < \max(x, y).$$
2. Załóżmy, że $|f'(x)| \leq M$ dla $a \leq x \leq b$. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej pokazać, że $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$, czyli $f(a) - M(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a)$.

Wielomian Taylora funkcji.

Twierdzenie 1 (Wzór Taylora)**.** *Mamy daną funkcję $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a, b)$. Zakładamy, że funkcja f ma $n+1$ pochodną, która jest ciągła. Wtedy dla $x \in (a, b)$ mamy:*
$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x),$$
gdzie reszta $R_n(x)$ jest dana przez
$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)(x - x_0)^{n+1}$$
oraz ξ_x jest punktem pomiędzy x a x_0.

1. Napisz n-ty wzór Taylora funkcji $\sin x$ dla $n = 6, 7, 8$.
2. Niech $W(x)$ będzie wielomianem stopnia n. Napisz $n-1, n, n+1$ wielomiany Taylora dla $W(x)$.
3. Stosując wzór Taylora oblicz:
   (a) $\sin \frac{1}{2}$ z dokładnością do 10^{-4},
   (b) $\sqrt{101}$ z dokładnością do 10^{-3},
   (c) $\ln 1/3$ z dokładnością do 10^{-3}.
4. Rozwiń $\cos x$ w wielomian Taylora dowolnego rzędu. Uzasadnij, że dla ustalonego $x \in \mathbb{R}$ reszty $R_n(x)$ zbiegają do zera. Wywnioskuj, że:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$
5. Policz wzór Taylora dla funkcji $\frac{1}{1-x}$ w punkcie $x_0 = 0$. Dla jakich x szereg Taylora jest zbieżny i odtwarza funkcję.
6. Rozwiń $\ln(1 + x)$ we wzór Taylora dowolnego rzędu. Uzasadnij, że dla $x \in (-1/2, 1]$ reszty zbiegają do zera.