Jelenia Góra, 26 października 2013 r.

UNIWERSYTECKIE KÓŁKO MATEMATYCZNE - POZIOM β

WWW.MATH.UNI.WROC.PL/~PREISNER/JG/

Sumy

1. Wypisz wszystkie wyrazy sum

$$(a)\ \sum_{0\le k\le 7} a_k \quad (b)\ \sum_{0\le k\le 3} a_{k^2} \quad (c)\ \sum_{-1\le k^2\le 7} a_k$$
$$(d)\ \sum_{3\le k\le 8} k^2 \quad (e)\ \sum_{0\le k^2\le 7} k^3 \quad (f)\ \sum_{k\in\{1,2,3\}} 2^k$$

Zostają skrajne. Opierać się będziemy na następującej równości:

$$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots(a_n-a_{n-1})+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1$$

Czyli:

$$(*)\qquad \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}-a_k = a_{n+1}-a_1$$

2. Oblicz

$$(a)\ \sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)} \quad (b)\ \sum_{k=1}^{n} kd \quad (c)\ \sum_{k=1}^{n}(a+kr)$$

3. Podstawiając w $(*)$ $a_k=\frac{(2k-1)^3}{24}$, wyprowadź wzór na $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Równość $(*)$ można wykorzystywać w mniej magiczny sposób. Przypuśćmy, że mamy do udowodnienia równość:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n)$$

Wtedy wystarczy wykazać, że

$$g(k)-g(k-1)=f(k)$$

4. Udowodnij, że

$$(a)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \quad (b)\ \sum_{k=1}^{n}\binom{l+k-1}{k}=\binom{l+n}{l+1}$$
$$(c)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{x-x^{2^n}}{(1-x)(1-x^{2^n})} \quad (d)\ \sum_{k=1}^{n} k\cdot k!=(n+1)!-1$$

Schemat zaburzania. Wydzielanie pojedynczego wyrazu poza sumę stanowi podstawę *metody zaburzania*, która często pozwala wyliczyć sumę w postaci zwartej. Pomysł polega na oznaczeniu niewiadomej wartości sumy przez S_n:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$$

Następnie przepisujemy S_{n+1} na dwa sposoby: wydzielając pierwszy i ostatni wyraz, w rezultacie dostajemy równanie:

$$S_n+a_{n+1}=a_0+\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$$

Teraz możemy popracować nad ostatnią sumą i wyrazić ją przez S_n otrzymamy równanie, którego rozwiązaniem będzie szukana suma.

5. Przy pomocy schematu zaburzania oblicz

$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 \quad (b)\quad \sum_{k=0}^{n} k2^k \quad (c)\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k} \quad (d)\quad \sum_{k=0}^{n} k$$
$$(e)\quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \qquad (f)\quad \sum_{k=0}^{n} ax^k \quad (g)\quad \sum_{k=0}^{n} c^k$$

6. Pokaż, że:

$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (b)\quad \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}^{-2} = 0 \quad (c)\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$$

7. Oblicz

$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} \quad (b)\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \quad (c)\quad \sum_{k=0}^{n} x^k\binom{n}{k}$$

8. Zsumuj

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{x+k}{i}$$

gdzie i oraz m są liczbami naturalnymi. Czy możesz nie zakładać, że x jest liczbą całkowitą?

9. Zapisz k^2 jako $a_2\binom{k}{2} + a_1\binom{k}{1} + a_0\binom{k}{0}$. Wykorzystaj to do policzenia $\sum_{k=0}^{n} k^2$

10. Spróbuj użyć metody zaburzania, aby obliczyć nieskończone sumy:

$$(a)\quad \sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k} \quad (b)\quad \sum_{0\leq k\leq n} 2^k$$

Czy potrafisz wyjaśnić co się stało?

11. Jaka jest największa liczba obszarów wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

12. Otwórz książkę "Matematyka Konkretna". Przeczytaj troszkę. Naciesz oko. Powtórz.