Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka teoretyczna

Marcin Preisner

Twierdzenie mnożnikowe dla transformaty Hankela na przestrzeni Hardy'ego H^1

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dr hab. Jacka Dziubańskiego

WROCŁAW 2008

Spis treści

Rozdział 1. Wstęp 1

Rozdział 2. Operatory dodatnie 3
2.1. Operator dodatni samosprzężony 3
2.2. Potęgi operatora dodatniego i ich przybliżenia 4

Rozdział 3. Operator Laplace'a 5
3.1. Definicja operatora Δ 5
3.2. Półgrupa ciepła H_t 5
3.3. Dziedzina w $L^2(\mathbb{R})$ 6
3.4. Transformata Fouriera 6
3.5. $(-\Delta)^\beta$ jako całka singularna dla $\beta \in (0,1)$ 7
3.6. Istotna samosprzężoność $(-\Delta)^\beta$ 10
3.7. Opis dziedziny operatora $(-\Delta)^\beta$ 11

Rozdział 4. Operator Bessela 12
4.1. Definicja operatora L 12
4.2. Półgrupa T_t 12
4.3. Dziedzina w $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$ 13
4.4. Transformata Hankela 13
4.5. Opis dziedziny operatora L^β 14
4.6. Uogólnione przesunięcie i splot 14
4.7. Szacowania 15

Rozdział 5. Porównanie przestrzeni Soboleva dla $-\Delta$ i L 18
5.1. Ograniczoność operatorów $(-\Delta)^\beta$ i L^β z dala od nośnika 18
5.2. Różnica pomiędzy $(-\Delta)^\beta$ i L^β w pobliżu nośnika 20
5.3. Lokalne porównanie operatorów $(-\Delta)^\beta$ i L^β 21

Rozdział 6. Twierdzenie mnożnikowe na przestrzeni Hardy'ego 26
6.1. Atomowa przestrzeń Hardy'ego 26
6.2. Twierdzenie mnożnikowe 27

Bibliografia 32

ROZDZIAŁ 1

Wstęp

Niech $\mathbf{m}$ będzie ograniczoną funkcją na $\mathbb{R}^n$. Klasyczne twierdzenie mnożnikowe Hörmadera [**7**] orzeka, że jeśli $\mathbf{m}$ spełnia pewien warunek regularności, wyrażony za pomocą ograniczoności norm Sobolewa obcięć funkcji $\mathbf{m}$, to operator mnożnikowy

$$\mathbf{g} \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\mathbf{m}\,\mathcal{F}\mathbf{g}\right),$$

zdefiniowany dla $\mathbf{g} \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, przedłuża się do ograniczonego operatora na $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Symbol $\mathcal{F}$ oznacza operator transformacji Fouriera.

Idee zawarte w pracy Hörmandera [**7**] były używane przez wielu autorów do dowodów spektralnych twierdzeń mnożnikowych dla operatorów samosprzężonych, będących generatorami infinitezymalnymi półgrup operatorów, działających na przestrzeniach L^p.

Ograniczmy się na chwilę do funkcji radialnych i mnożników radialnych na $\mathbb{R}^n$. Funkcje takie możemy w naturalny sposób utożsamiać z funkcjami na półprostej zależnością $g(x) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, gdzie $x = |\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $x > 0$. Ponieważ transformacja Fouriera $\mathcal{F}\mathbf{g}$ funkcji radialnej $\mathbf{g}$ jest funkcją radialną, mamy następujący operator

$$\mathcal{H}_n g(x) = \mathcal{F}\mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad x = |\mathbf{x}|,$$

zwany transformacją Hankela (Fouriera-Bessela). Spektralne twierdzenie mnożnikowe Hörmandera można dla funkcji radialnych na $\mathbb{R}^n$ wysłowić w języku transformacji Hankela. Oczywiście właściwą miarą na półprostej jest miara $x^{n-1}dx$.

W podobny sposób możemy utożsamić operator $-\Delta$ na $\mathbb{R}^n$ działający na funkcjach radialnych z operatorem Bessela

$$L_n = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{d}{dx}$$

działającym na funkcjach zdefiniowanych na półprostej. Mamy

$$\int_{\mathbb{R}^+} f'(x)g'(x)x^{n-1}dx = \int_{\mathbb{R}^+} L_n f(x)g(x)x^{n-1}dx, \quad (f, g \in C_c^2(\mathbb{R}^+)),$$

$$\mathcal{H}_n(L_n f)(\lambda) = \lambda^2 \mathcal{H}_n f(\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Operator Bessela można zdefiniować dla $n = a + 1$, gdzie a jest dodatnią liczbą rzeczywistą i rozważać półgrupy operatorów $\{T_t^{a+1}\}_{t>0}$ generowane prze $-L_{a+1}$ działające na przestrzeniach $L^p(\mathbb{R}^+, x^a dx)$. Liczba $a + 1$ pełni rolę wymiaru przestrzeni. I w tym przypadku istnieje transformacja Hankela $\mathcal{H}_{a+1}$ będąca odpowiednikiem transformacji Fouriera. Jest ona z dokładnością do stałej multyplikatywnej izometrią na $L^2(\mathbb{R}^+, x^a dx)$ oraz $\mathcal{H}_{a+1}^2 = c_a I$.

Goselin i Stempak [**6**] udowodnili następujące twierdzenie mnożnikowe dla transformaty Hankela.

TWIERDZENIE 1.1. *Niech k będzie najmniejszą parzystą liczbą całkowitą większą niż $\frac{a+1}{2}$ oraz niech $m \in C^k(\mathbb{R}^+)$ będzie ograniczoną funkcją spełniającą*

$$\left(\int_{R/2}^{R} |m^{(s)}(x)|^2 x^a\, dx\right)^{1/2} \leqslant c\, R^{(a+1)/2-s},$$

gdzie c jest stałą niezależną od $R > 0$ i $s = 0, 1, \dots, k$. Wtedy operator mnożnikowy $S_m f = \mathcal{H}_{a+1}(m\mathcal{H}_{a+1}f)$ jest słabego typu (1,1), tzn.

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^+ : |S_m f(x)| > \tau\}) \leqslant c\tau^{-1}\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^+, x^a\,dx)},$$

gdzie μ oznacza miarę o gęstości $x^a\,dx$ na $\mathbb{R}^+$, c jest stałą niezależną od $\tau > 0$, a $f \in L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$.

Standardowymi metodami, poprzez interpolacje Marcinkiewicza (por. [**15**], [**11**]), powyższy wynik daje ograniczoność na $L^p(\mathbb{R}^+, x^a\,dx)$ operatorów S_m dla m spełniających założenia powyższego twierdzenia. Twierdzenia mnożnikowe dla transformaty Hankela na przestrzeniach L^p były intensywnie badane (patrz Garrigós-Seeger [**4**], Gasper-Trebels [**5**], Stempak [**12**], [**13**] i referencje tam zamieszczone).

Celem ninijeszej pracy jest udowodnienie twierdzenia mnożnikowego dla transformacji Hankela na przestrzeniach Hardy'ego $H^1(\mathbb{R}^+, x^a dx)$, $a > 0$. Wykażemy, że jeśli dla pewnego $\beta > (a+1)/2$ ograniczona funkcja m zdefiniowana na $\mathbb{R}^+$ spełnia warunek

$$\sup_{t>0}\|\eta(\,\cdot\,)m(t\,\cdot\,)\|_{W^{2,\beta}} \leqslant C_\eta$$

dla każdej (pewnej) funkcji $\eta \in C_c^\infty(\frac{1}{2}, 2)$, to operator mnożnikowy

$$f \mapsto \mathcal{H}_{a+1}(m\mathcal{H}_{a+1}f)$$

jest ograniczony na przestrzeni Hardy'ego $H^1(\mathbb{R}^+, x^a\,dx)$. Symbol $\|\ \|_{W^{2,\beta}}$ oznacza klasyczną normę Sobolewa. Dowód twierdzenia będzie wykorzystywał charakeryzacje przestrzeni Hardy'ego $H^1(\mathbb{R}^+, x^a\,dx)$ za pomocą rozkładów atomowych i funkcji maksymalnej zdefiniowanej za pomocą półgrupy operatorów T_t^{a+1} (por. (4.2)).

Praca zorganizowana jest następująco. W rozdziale 2 wprowadzimy za pomocą twierdzenia spektralnego definicje potęgi operatora samosprzężonego dodatniego. Rozdziały 3 i 4 poświęcone są operatorom Laplace'a i Bessela, ich potęgom i półgrupom przez nie generowanym. Przestawimy i udowodnimy także podstawowe własności splotu uogólnionego. W rozdziale 5 porównamy lokalnie klasyczną przestrzeń Sobolewa z przestrzenią Sobolewa dla transformaty Hankela $\mathcal{H}_{a+1}$. Głównym celem tego rodziału jest wykazanie następującej nierówności (patrz wniosek 5.7)

$$\int_{\mathbb{R}^+}(1+\zeta)^{2\beta}|\mathcal{H}_{a+1}m(\zeta)|^2\zeta^a d\zeta \leqslant c_{\beta,a}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|)^{2\beta}|\mathcal{F}m(\xi)|^2 d\xi$$

dla funkcji m mających nośnik w przedziale $(\frac{1}{2}, 2)$ ze stałą $c_{\beta,a}$ niezależną od m.

Na początku rozdziału 6 zdefiniujemy przestrzeń Hardy'ego $H^1(\mathbb{R}^+, x^a dx)$. Następnie udowodnimy przedstawione powyżej twierdzenie mnożnikowe, które jest głównym celem tej pracy. W literaturze nie znaleźliśmy takiego wyniku.

Podziękowania. Serdecznie dziękuję prof. Gustavo Garrigósowi oraz prof. dr. hab. Krzysztofowi Stempakowi za rozmowy i wskazanie literatury, a także opiekunowi pracy magisterkiej dr. hab. Jackowi Dziubańskiemu za pomoc i opiekę.

ROZDZIAŁ 2

Operatory dodatnie

W drugim rozdziale przypominamy definicję i podstawowe twierdzenie używane do badania operatorów nieograniczonych na przestrzeniach Hilberta $\mathbb{H}$. Ponadto zdefiniujemy potęgę operatora dodatniego i zbudujemy pewien ciąg jej przybliżeń złożony z operatorów ograniczonych.

2.1. Operator dodatni samosprzężony

Załóżmy, że mamy daną przestrzeń Hilberta $\mathbb{H}$ z iloczynem skalarnym (f, g) dla $f, g \in \mathbb{H}$.

DEFINICJA 2.1. *Operator $A : D_A \to \mathbb{H}$ nazywamy operatorem gęsto określonym, gdy jego dziedzina D_A jest gęstą podprzestrzenią liniową $\mathbb{H}$.*

DEFINICJA 2.2. *Operator gęsto określony A na $\mathbb{H}$ nazywamy dodatnim, gdy dla dowolnego $f \in D_A$ zachodzi $(Af, f) \geqslant 0$.*

DEFINICJA 2.3. *Operator gęsto określony A na $\mathbb{H}$ nazywamy samosprzężonym, gdy $D_A = D_{A^*}$ oraz dla $f, g \in D_A$ spełnione jest $(Af, g) = (f, Ag)$.*

Ostatnia z tych definicji wymaga wcześniejszego zdefiniowania D_{A^*} i A^*, które są jednoznacznie zdefiniowane dla operatora gęsto określonego A. Ich określenie można znaleźć na przykład w [**9**]. Tam też znajdziemy twierdzenie spektralne używane do badania operatorów normalnych, ale tu przytoczymy tylko wersję dla operatorów samosprzężonych. Definicję rozkładu jedynki (miary spektralnej) znajdziemy także w [**9**].

TWIERDZENIE 2.1 (Twierdzenie spektralne). *Każdemu samosprzężonemu operatorowi A w $\mathbb{H}$ odpowiada dokładnie jedna miara spektralna E na zbiorach borelowskich $\mathbb{R}$ taka, że dla $f \in D_A$ oraz $g \in \mathbb{H}$ jest spełnione*

$$(Af, g) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_{f,g}(\lambda). \tag{2.1}$$

Ponadto, jeśli A jest dodatni, to całka jest po zbiorze $[0, \infty)$.

TWIERDZENIE 2.2 (Własności rozkładu jedynki). *Dla rozkładu jedynki E na zbiorze $\mathbb{R}$ zachodzi*

(a) *Każdej funkcji borelowskiej $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ odpowiada gęsto określony, domknięty operator $\Psi(\varphi)$ z dziedziną*

$$D(\Psi(\varphi)) = \{f \in \mathbb{H} : \int_{\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|^2 \, dE_{f,f}(\lambda) < \infty\}, \tag{2.2}$$

który jest wyznaczony przez

$$(\Psi(\varphi)f, g) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, dE_{f,g} \qquad (f \in D(\Psi(\varphi)), g \in \mathbb{H}) \tag{2.3}$$

oraz spełnia

$$||\Psi(\varphi)f||^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 \, dE_{f,f} \qquad (f \in D(\Psi(\varphi)))\,. \tag{2.4}$$

(b) *Zachodzi twierdzenie o mnożeniu: Jeśli* φ *i* φ' *są borelowskie, to*
$\Psi(\varphi)\Psi(\varphi') \subseteq \Psi(\varphi \cdot \varphi')$ *oraz* $D(\Psi(\varphi)\Psi(\varphi')) = D(\Psi(\varphi') \cap D(\Psi(\varphi \cdot \varphi')))$.

(c) *Dla każdej funkcji borelowskiej* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\Psi(\varphi)^* = \Psi(\overline{\varphi})$$

oraz

$$\Psi(\varphi)\Psi(\varphi)^* = \Psi(|\varphi|^2) = \Psi(\varphi)^*\Psi(\varphi).$$

2.2. Potęgi operatora dodatniego i ich przybliżenia

Od tego momentu A będzie oznaczać gęsto określony, dodatni i samosprzężony operator na pewnej przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$. Za pomocą twierdzenia spektralnego możemy dla $\beta > 0$ zdefiniować operator A^β, jako $\Psi(\lambda^\beta)$. Jest on wyznaczony przez (2.3), a jego dziedzinę określa wzór (2.2).

Przybliżymy teraz operator A^β dla $\beta \in (0,1)$ za pomocą pewnych operatorów ograniczonych określonych na całym $\mathbb{H}$. Skorzystamy ze znanej tożsamości

$$\lambda^\beta = c_\beta \int_0^\infty t^{-\beta}(1 - e^{-t\lambda})\frac{dt}{t}. \tag{2.5}$$

W powyższym wzorze $c_\beta = \frac{1}{\beta}\Gamma(1-\beta)$. Wprowadzimy teraz funkcje przybliżające

$$g_\varepsilon(\lambda) = c_\beta \int_{\varepsilon^2}^\infty t^{-\beta}(1 - e^{-t\lambda})\frac{dt}{t}. \tag{2.6}$$

Widzimy, że g_ε są dodatnimi funkcjami ograniczonymi dążącymi do λ^β oraz $g_\varepsilon(\lambda) \leqslant g_{\varepsilon'}(\lambda)$ dla $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Oznaczmy $g_\varepsilon(A) = \Psi(g_\varepsilon)$. Z twierdzenia spektralnego wynika, że $g_\varepsilon(A)$ są operatorami ograniczonymi na całym $\mathbb{H}$.

LEMAT 2.3. *Jeśli* $f \in D(A^\beta)$*, to* $g_\varepsilon(A)f \to A^\beta f$ *w* $\mathbb{H}$*. Odwrotnie: jeśli* $g_\varepsilon(A)f$ *zbiega w* $\mathbb{H}$*, to* $f \in D(A^\beta)$*.*

Dowód. Z twierdzenia spektralnego mamy

$$\|A^\beta f - g_\varepsilon(A)f\|_{\mathbb{H}} = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\lambda^\beta - g_\varepsilon(\lambda)\right)^2 dE_{f,f}(\lambda) \to 0 \tag{2.7}$$

dzięki twierdzeniu Lebesque'a o zbieżności ograniczonej. Odwrotnie: jeśli $g_\varepsilon(A)f$ zbiega w $\mathbb{H}$, to

$$\infty > \|g_\varepsilon(A)f\|_{\mathbb{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}^+} g_\varepsilon^2(\lambda)\, dE_{f,f}(\lambda) \to \int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{2\beta}\, dE_{f,f}(\lambda) \tag{2.8}$$

przy $\varepsilon \to 0$, dzięki twierdzeniu o zbieżności monotonicznej.

□

Wprowadzamy teraz półgrupę operatorów ograniczonych $\{\Psi(e^{-t\lambda})\}_{t>0}$, zgodnie z równaniem (2.3). Wtedy z (2.6) i twierdzenia Lebesque'a o zbieżności ograniczonej wynika równość operatorów

$$g_\varepsilon(A)f = c_\beta \int_{\varepsilon^2}^\infty t^{-\beta}(f - \Psi(e^{-t\lambda})f)\ \frac{dt}{t} \tag{2.9}$$

Zauważmy również, że wszystkie operatory $g_\varepsilon(A)$ oraz A^β są zadane przez funkcje dodatnie, zatem są samosprzężone i dodatnie.

ROZDZIAŁ 3

Operator Laplace'a

W tym rozdziale zajmiemy się operatorem Laplace'a. Zobaczymy jak wyglądają przybliżenia zdefiniowane w paragrafie 1.2. Opiszemy też potęgę tego operatora za pomocą pewnej całki singularnej oraz podamy kilka charakteryzacji dziedziny tej potęgi. Pokażemy też, że te potęgi są istotnie samosprzężone.

Na początku ustalmy, że przez c będziemy oznaczać dodatnią stałą, która może się zmieniać. W sytuacjach wątpliwych będzie wyraźnie zaznaczone od jakich zmiennych zależy ta stała.

3.1. Definicja operatora Δ

Operator Laplace'a na $\mathbb{R}$ oznaczamy Δ i definiujemy przez

$$\Delta f = \frac{d^2}{dx^2} f. \tag{3.1}$$

Operator ten jest dobrze zdefiniowany dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnych. W ogólniejszej sytuacji możemy rozszerzyć definicję dla dystybucji temperowanych przez

$$(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta\varphi), \tag{3.2}$$

gdzie φ jest funkcją z klasy Schwartza, którą oznaczamy przez $\mathcal{S}$. Taka definicja oczywiście zgadza się dla $f \in C^2(\mathbb{R})$. Ponadto powyższy wzór defniuje Δf dla $f \in L^2(\mathbb{R})$. Pojawia się jednak problem, bo w ogólności Δf jest zadane tylko w sensie dystrybucyjnym, ale nie musi być już w funkcją z $L^2(\mathbb{R})$.

3.2. Półgrupa ciepła H_t

Do zdefiniowania dziedziny Δ, która będzie gęstą podprzestrzenią $L^2(\mathbb{R})$ użyjemy półgrupy ciepła $\{H_t\}_{t>0}$. Jądrem tej półgrupy jest

$$H_t(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right). \tag{3.3}$$

Z definicji

$$H_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} H_t(x,y) f(y)\, dy. \tag{3.4}$$

Operatory te są dobrze zdefiniowane na całym $L^2(\mathbb{R})$. Półgrupa ciepła jest mocno ciągła, tzn. dla $f \in L^2(\mathbb{R})$ zachodzi $H_t f \to f$ przy $t \to 0$. Ponadto z faktu, że jądro $H_t(x,y)$ jest rzeczywiste i symetryczne (tzn. $H_t(x,y) = H_t(y,x)$) wynika samosprzężoność operatorów H_t na $L^2(\mathbb{R})$. Można też łatwo sprawdzić, że H_t są kontrakcjami (tzn. $\|H_t f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$). Generatorem infinitezymalnym dla tej półgrupy jest właśnie Δ (tzn. $\lim_{t\to\infty} \frac{H_t f - f}{t} = \Delta f$ dla odpowienich f).

3.3. Dziedzina w $L^2(\mathbb{R})$

Za pomocą półgrupy H_t możemy zdefiniować dziedzinę Δ, jako generatora infinitezymalnego, poprzez

$$D(\Delta) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \lim_{t\to 0} \frac{H_t f - f}{t} \text{ istnieje w } L^2(\mathbb{R}) \right\} \tag{3.5}$$

Dla $f \in D(\Delta)$ definiujemy $\Delta f = \lim_{t\to 0} \frac{H_t f - f}{t}$ i to określenie zgadza się z (3.1) dla $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. W ten sposób $-\Delta$ z $D(-\Delta) = D(\Delta)$ staje się gęsto określonym, samosprzężonym, dodatnim operatorem na $L^2(\mathbb{R})$ (dodatniość w łatwy sposób wynika z tego, że H_t są kontrakcjami). Z rozdziału pierwszego wiemy zatem, że istnieje jego rozkład spektralny E, dzięki któremu możemy zdefiniować $(-\Delta)^\beta$, $D((-\Delta)^\beta)$, przybliżenia ograniczone $g_\varepsilon(-\Delta)$ oraz półgrupę $\Psi(e^{-t\lambda})$.

3.4. Transformata Fouriera

Jest dobrze znane, że miara spektralna E dla $-\Delta$ ma postać

$$E(\omega)f = \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{\sqrt{\omega}}(\xi)\mathcal{F}f(\xi)\right), \tag{3.6}$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest transformatą fouriera, a $\chi_{\sqrt{\omega}}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $\sqrt{\omega} = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi|^2 \in \omega\}$. To nam daje gęstość miary $E_{f,g}$

$$dE_{f,g}(\lambda) = \left(\mathcal{F}f(\sqrt{\lambda})\overline{\mathcal{F}g\sqrt{\lambda})} + \mathcal{F}f(-\sqrt{\lambda})\overline{\mathcal{F}g(-\sqrt{\lambda})} \right) \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{3.7}$$

Dzięki temu możemy policzyć, że

$$D((-\Delta)^\beta) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \| \, |\xi|^{2\beta}\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty\}, \tag{3.8}$$

$$\mathcal{F}((-\Delta)^\beta f)(\xi) = |\xi|^{2\beta}\mathcal{F}f(\xi) \text{ dla } f \in D((-\Delta)^\beta), \tag{3.9}$$

$$\Psi(e^{-t\lambda})f = H_t f \text{ dla } f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{3.10}$$

Niech $\|\cdot\|_{W^{2,2\beta}}$ oznacza normę Sobolewa, tzn.

$$\|f\|_{W^{2,2\beta}} = \|(1+|\xi|)^{2\beta}\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.11}$$

Zauważmy teraz, że (3.9) oznacza równość

$$\|(-\Delta)^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \||\xi|^{2\beta}\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{3.12}$$

a to implikuje, że dla $f \in D((-\Delta)^\beta)$ zachodzi

$$c^{-1}\|f\|_{W^{2,2\beta}} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|(-\Delta)^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant c\|f\|_{W^{2,2\beta}}. \tag{3.13}$$

Wniosek 3.1. *Jeśli $\beta = \beta_1 + \beta_2$, to dla $f \in L^2(\mathbb{R})$ zachodzi*

$$f \in D((-\Delta)^\beta) \iff f \in D((-\Delta)^{\beta_1}) \ \ i \ (-\Delta)^{\beta_1} f \in D((-\Delta)^{\beta_2}). \tag{3.14}$$

Ponadto

$$\|(-\Delta)^{\beta_1} f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\|(-\Delta)^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.15}$$

Dowód. Korzystając z warunku (3.8) lewa strona jest równoważna warunkowi $\|\mathcal{F}f(\xi)\,|\xi|^{2\beta}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$. To implikuje pierwszy warunek prawej strony, ponieważ

$$\| \, |\xi|^{2\beta_1}\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{W^{2,2\beta_1}} \leqslant \|f\|_{W^{2,2\beta}} \leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\|(-\Delta)^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.16}$$

Reszta dowodu wynika z równości

$$\| \, |\xi|^{2\beta_2}\mathcal{F}((-\Delta)^{\beta_1} f)(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \| \, |\xi|^{2\beta_2}|\xi|^{2\beta_1}\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \| \, |\xi|^{2\beta}\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.17}$$

□

W dalszej części potrzebny nam będzie następujący fakt

LEMAT 3.2. *Załóżmy, że $\phi \in \mathcal{S}$ jest ustaloną funkcją. Jeśli $m \in D((-\Delta)^\beta)$, to również $m \cdot \phi \in D((-\Delta)^\beta)$ oraz*

$$\|m \cdot \phi\|_{W^{2,2\beta}} \leqslant c\|m\|_{W^{2,2\beta}}. \tag{3.18}$$

Dowód. Pokażemy, że warunek ze wzoru (3.8) jest spełniony.

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(m\cdot\phi)(\xi)(1+|\xi|)^{2\beta}\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|(\mathcal{F}m * \mathcal{F}\phi)(\xi)(1+|\xi|)^{2\beta}\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \|\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}m(\xi-\zeta)\mathcal{F}\phi(\zeta)|(1+|\xi-\zeta|)^{2\beta}(1+|\zeta|)^{2\beta}\,d\zeta\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \|\mathcal{F}m(\xi)(1+|\xi|)^{2\beta}\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\mathcal{F}\phi(\xi)(1+|\xi|)^{2\beta}\|_{L^1(\mathbb{R})}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

W obliczeniach skorzystaliśmy z nierówności Younga oraz faktu $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{S}$.

□

3.5. $(-\Delta)^\beta$ jako całka singularna dla $\beta \in (0,1)$

W tym i następnym paragrafie będziemy zakładali, że $\beta \in (0,1)$. Policzymy najpierw przybliżenia $g_\varepsilon(-\Delta)$ zdefiniowane wzorem (2.9).

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(-\Delta)f(x) &= c_\beta \int_{\varepsilon^2}^\infty t^{-\beta}(f(x)-H_tf(x))\,\frac{dt}{t}\\ &= c_\beta \int_{\varepsilon^2}^\infty t^{-\beta}\int_{\mathbb{R}}\big((f(x)-f(y))H_t(x,y)\,dy\big)\,\frac{dt}{t}\\ &= \int_{\mathbb{R}}(f(x)-f(y))K_\varepsilon(x-y)\,dy, \end{aligned} \tag{3.20}$$

gdzie $K_\varepsilon(x) = \int_{\varepsilon^2}^\infty c_\beta t^{-\beta}(4\pi t)^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{4t}}\,\frac{dt}{t}$. W drugiej równości skorzystaliśmy z tego, ze $\int_{\mathbb{R}} H_t(x,y)\,dy = 1$. Zamieniając zmienne w całce definiujacej $K_\varepsilon(x)$ mamy

$$K_\varepsilon(x) = |x|^{-1-2\beta}\int_0^{x^2/\varepsilon^2}(4\pi)^{-1/2}t^{\beta+1/2}e^{-t/4}\,\frac{dt}{t} = |x|^{-1-2\beta}\Phi\left(\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right), \tag{3.21}$$

gdzie $\Phi(s)$ jest powyższą całką w granicach od 0 do s. Ponadto $\Phi(s)$ jest funkcją rosnącą na $(0,\infty)$, przy $s\to\infty$ dąży do $C_\beta = c_\beta\pi^{-1/2}4^\beta\Gamma(\beta+1/2)$, a w zerze jest rzędu $s^{\beta+1/2}$. Wtedy $g_\varepsilon(-\Delta)f$ przyjmuje postać

$$g_\varepsilon(-\Delta)f(x) = \int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{1+2\beta}}\Phi\left(\frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2}\right)\,dy. \tag{3.22}$$

Jeśli we wzorze (3.21) przejdziemy z $\varepsilon\to 0$ (przy ustalonym x), to w granicy dostaniemy $C_\beta|x|^{-1-2\beta}$. Zatem dla dobrze dobranych f (np. gdy $f\in\mathcal{S}$, ale pokażemy to dla szerszej klasy funkcji) we wzorze (3.22) zbieżnoś będzie do całki singularnej

$$Kf(x) = C_\beta\lim_{\delta\to 0}\int_{|x-y|>\delta}\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{1+2\beta}}\,dy. \tag{3.23}$$

LEMAT 3.3. *Jeśli $f\in C^2(\mathbb{R})$ jest taka, że $f, f', f'' \in L^2(\mathbb{R})$, to zachodzi*
(a) *$g_\varepsilon(-\Delta)f \to Kf$ punktowo oraz w $L^2(\mathbb{R})$,*
(b) *$f\in D((-\Delta)^\beta)$,*
(c) *$(-\Delta)^\beta f = Kf$ w $L^2(\mathbb{R})$.*

Dowód. W lemacie 2.3 zauważyliśmy, że jeśli $g_\varepsilon(-\Delta)f$ zbiegają do $g\in L^2(\mathbb{R})$, to $f\in D((-\Delta)^\beta)$ oraz $g = (-\Delta)^\beta f$, więc punkt (b) wyniknie z (a). Wtedy (c) będzie prawdą, bo funkcje Kf oraz $(-\Delta)^\beta f$ są granicami ciągu $g_\varepsilon(-\Delta)f$ w $L^2(\mathbb{R})$.

Udowodnimy teraz (a). Zapiszmy

$$Kf(x) - g_\varepsilon(-\Delta)(x) \quad = \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{1>|x-y|>\delta}\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{1+2\beta}}\left(C_\beta - \Phi\left(\frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2}\right)\right)\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{|x-y|>1} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{1+2\beta}} \left(C_\beta - \Phi\left(\frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2}\right)\right) dy \\
&= A_1(x) + A_2(x).
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Wówczas

$$
\begin{aligned}
A_2(x) &= f(x) \int_{|y|>1} \frac{1}{|y|^{1+2\beta}} \left(C_\beta - \Phi\left(\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right)\right) dy \\
&- \int_{|x-y|>1} \frac{f(y)}{|x-y|^{1+2\beta}} \left(C_\beta - \Phi\left(\frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2}\right)\right) dy \\
&= u(\varepsilon) f(x) - (f * h)(x) + (f * h_\varepsilon)(x),
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

gdzie $u(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, $u(\varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$, $h_\varepsilon(x) = |x|^{-1-2\beta}\Phi((x/\varepsilon)^2)\chi_{\{y:|y|>1\}}(x)$ oraz $h(x) = C_\beta |x|^{-1-2\beta}\chi_{\{y:|y|>1\}}(x)$. Zbieżność $u(\varepsilon)f \to 0$ jest oczywista (zarówno punktowo, jak i w $L^2(\mathbb{R})$). Zauważmy, że $h_\varepsilon \to h$ w $L^1(\mathbb{R})$, więc dzięki nierówności Younga $f * (h_\varepsilon - h) \to 0$ w $L^2(\mathbb{R})$. Zbieżność punktowa wynika łatwo z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej.

Aby zbadać $A_1(x)$ rozpiszmy $f(x) - f(y)$ używając wzoru Taylora z resztą w postaci całkowej. Mamy

$$
\begin{aligned}
A_1(x) &= \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|x-y|>\delta} \frac{\int_0^{x-y} (x-y-s) f''(x+s)\, ds}{|x-y|^{1+2\beta}} \left(C_\beta - \Phi\left(\frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2}\right)\right) dy \\
&+ \lim_{\delta\to 0} \int_{1>|x-y|>\delta} \frac{f'(x)(x-y)}{|x-y|^{1+2\beta}} \left(C_\beta - \Phi\left(\frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2}\right)\right) dy.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Całka z drugiego składnika dla każdej $\delta > 0$ jest równa 0, gdyż po przesunięciu zmiennych jest to całka z funkcji nieparzystej po zbiorze symetrycznym względem zera. W tym momencie osobliwość w x jest już całkowalna, więc możemy pominąć granicę. Teraz

$$
|A_1(x)| \leqslant C_\beta \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x-y-s|\,|f''(x+s)|}{|x-y|^{1+2\beta}} \chi_{(-1,1)}(x-y) \widetilde{\chi}(s, x-y)\, dy\, ds, \tag{3.27}
$$

gdzie $\widetilde{\chi}(s, x-y) = 1$, gdy s jest pomiędzy 0 i $x - y$, a w przeciwnym wypadku $\widetilde{\chi}(s, x-y) = 0$. Dalej

$$
\int_{\mathbb{R}} \frac{|x-y-s|}{|x-y|^{1+2\beta}} \chi_{(-1,1)}(x-y) \widetilde{\chi}(s, x-y)\, dy \leqslant \int_{|s|<|z|<1} \frac{|2z|}{|z|^{1+2\beta}}\, dy \leqslant c(1 + |s|^{1-2\beta}), \tag{3.28}
$$

więc

$$
|A_1(x)| \leqslant c \int_{|s|<1} |f''(x+s)|\, (1 + |s|^{1-2\beta})\, ds. \tag{3.29}
$$

Ta całka jest ograniczona, bo f'' jest ograniczona na przedziale $[x-1, x+1]$, tak więc twierdzenie o zbieżności ograniczonej daje punktową zbieżność $A_a(x) \to 0$. Aby uzyskać zbieżność w $L^2(\mathbb{R})$ skorzystamy z nierówności Younga.

$$
\left\| \int_{|s|<1} |f''(x+s)|\, (1+|s|^{1-2\beta})\, ds \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|(1+|s|)^{1-2\beta}\|_{L^1(-1,1)} \|f''\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.30}
$$

Kolejne zastosowanie twierdzenia Lebesque'a daje $\|A_1(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$.

□

Dla f z szerszej klasy, powiedzmy $f \in L^2(\mathbb{R})$, możemy zdefiniować Kf jako dystrybucję temperowaną wzorem $< Kf, \phi >= \int_{\mathbb{R}} f \cdot K\phi$. Powyższy lemat mówi nam, że tak zdefiniowana całka singularna jest rzeczywiście równa $(-\Delta)^\beta$ dla f spełniających założenia lematu. Okazuje się też, że Kf jest splotem pewnej dystrybucji temperowanej $\mathcal{K}$ z funkcją $f \in L^2(\mathbb{R})$. Niech

$$< \mathcal{K}, \phi >= \lim_{\delta \to 0} \int_{|x|>\delta} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{|x|^{1+2\beta}}\, dx \tag{3.31}$$

Powyższa całka singularna jest zbieżna dla wszystkich $\phi \in \mathcal{S}$, ale również dla ϕ spełniających założenia lematu 3.3. Ponieważ splot $f \in L^2(\mathbb{R})$ oraz $\phi \in \mathcal{S}$ spełnia założenia lematu 3.3, to możemy spleść $\mathcal{K}$ z każdą funkcją $f \in L^2(\mathbb{R})$ (z definicji $< \mathcal{K} * f, \phi >=< \mathcal{K}, \phi * \widetilde{f} >$, gdzie $\widetilde{f}(x) = f(-x)$). Oczywiście $\mathcal{K} * f = Kf$ jako dystrybucje temperowane.

Lemat 3.4. *Jeśli $f \in L^2(\mathbb{R})$ oraz $\psi \in \mathcal{S}$, to zachodzi równość dystrybucyjna*

$$\mathcal{K} * (f * \psi) = (\mathcal{K} * f) * \psi. \tag{3.32}$$

Dowód. Niech $\phi \in \mathcal{S}$ będzie funkcją testową. Wtedy

$$\begin{aligned} &< \mathcal{K} * (f * \psi), \phi >=< \mathcal{K}, \phi * (f * \psi)\widetilde{\ } >=< \mathcal{K}, \phi * (\widetilde{\psi} * \widetilde{f}) > \\ &=< \mathcal{K}, (\phi * \widetilde{\psi}) * \widetilde{f} >=< \mathcal{K} * f, \phi * \widetilde{\psi} >=< (\mathcal{K} * f) * \psi, \phi > . \end{aligned} \tag{3.33}$$

□

Teraz możemy już sformułować i udowodnić charakteryzację $D((-\Delta)^\beta)$ za pomocą wprowadzonej całki singularnej.

Twierdzenie 3.5. *Dla $f \in L^2(\mathbb{R})$ zachodzi*

$$f \in D((-\Delta)^\beta) \iff Kf \in L^2(\mathbb{R}) \text{ w sensie dystrybucyjnym.} \tag{3.34}$$

Wówczas $Kf = (-\Delta)^\beta f$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Jeśli $f \in D((-\Delta)^\beta)$, to $Kf = (-\Delta)^\beta f \in L^2(\mathbb{R})$ w sensie dystrybucyjnym, ponieważ

$$< Kf, \phi >= \int_{\mathbb{R}} f \cdot K\phi = \int_{\mathbb{R}} f \cdot (-\Delta)^\beta \phi =< (-\Delta)^\beta f, \phi > . \tag{3.35}$$

Pierwsza równość, to definicja Kf, druga wynika z lematu 2.1, a trzecia z samosprzężoności operatora $(-\Delta)^\beta$.

($\Leftarrow$) Niech $\psi \in C_c^\infty(-1,1)$ będzie funkcja dodatnią o całce równej 1. Wtedy $\psi_n(x) = n\psi(nx)$ jest aproksymacją jednością, czyli $f * \psi_n \to f$ w $L^2(\mathbb{R})$. Z lematu 3.4 wynika, że $K(f * \psi_n) = (Kf) * \psi_n \to Kf$ w $L^2(\mathbb{R})$. Z drugiej strony funkcje $f * \psi_n$ spełniają założenia lematu 3.3, więc należą do $D((-\Delta)^\beta)$ oraz $K(f * \psi_n) = (-\Delta)^\beta (f * \psi_n)$. Zatem z domkniętości operatora $(-\Delta)^\beta$ wynika, że $f \in D((-\Delta)^\beta)$ oraz $(-\Delta)^\beta f = Kf$.

□

Wniosek 3.6. *Dla $N \in \mathbb{N}$ oraz $f \in L^2(\mathbb{R})$ zachodzi równoważność:*

$$f \in ((-\Delta)^N) \iff f', f'', \ldots, f^{(2N)} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ w sensie dystrybucyjnym.} \tag{3.36}$$

Dowód. Niech Kf odpowiada $\beta = N$. Jest łatwo sprawdzić, że dystrybucyjna pochodna $f^{(2N)} = Kf$. Z powyższego twierdzenia natychmiast dostajemy ($\Leftarrow$) oraz tą część ($\Rightarrow$), która mówi, że $f^{(2N)} \in L^2(\mathbb{R})$ dystrybucyjnie. Wiemy zatem, że $\|\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|\,\xi^{2N}\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$. Dzięki temu dla $k = 1, 2, \ldots, 2N-1$ mamy

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f^{(k)})\|_{L^2(\mathbb{R})} &= c\|\xi^k \mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant c\|(1 + |\xi|^{2N})\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant c\|\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\|\,\xi^{2N}\mathcal{F}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Oczywiście, ponieważ $\mathcal{F}$ jest izometrią na $L^2(\mathbb{R})$, to również $f^{(k)}$ jest w $L^2(\mathbb{R})$.

□

3.6. Istotna samosprzężoność $(-\Delta)^\beta$

TWIERDZENIE 3.7. *Operator $(-\Delta)^\beta$ jest istotnie samosprzężony. Jego rdzeniem jest klasa $C_c^\infty(\mathbb{R})$, tzn.*

$$D((-\Delta)^\beta) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \exists\{f_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}) \ \ f_n \to f, \ \ (-\Delta)^\beta f_n \text{ zbiega w } L^2(\mathbb{R})\}. \tag{3.38}$$

Dowód. ($\supseteq$) Dzięki lematowi 3.3 zachodzi $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq D((-\Delta)^\beta)$, więc domkniętość operatora $(-\Delta)^\beta$ daje dowód tego zawierania.

($\subseteq$) Weźmy $f \in D((-\Delta)^\beta)$ oraz dowolne $\eta(x)$ gładkie, takie że $\chi_{[-1,1]}(x) \leqslant \eta(x) \leqslant \chi_{[-2,2]}(x)$. Oznaczmy $\eta^n(x) = \eta(x/n)$. Niech $h_t(x)$ będzie jądrem ciepła (jednej zmiennej). Wtedy $f_n = (f * h_{1/n}) \cdot \eta^n \to f$ w $L^2(\mathbb{R})$. Istotnie

$$\|f - (f * h_{1/n}) \cdot \eta^n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|f(1-\eta^n)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|(f - f * h_{1/n}) \cdot \eta^n\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.39}$$

Pierwsza norma dąży do zera, ponieważ funkcja $1-\eta^n$ jest równa zeru na przedziale $(-n,n)$. Drugi składnik jest szacowany przez $\|f - f * h_{1/n}\|_{L^2(\mathbb{R})}$, a ten zbiega do zera, bo $h_{1/n}$ jest aproksymacją jedności.
Zauważmy teraz, że $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\eta^n(\zeta)\, d\zeta = \eta^n(0) = 1$ oraz $\mathcal{F}\eta^n(\xi) = n\mathcal{F}\eta(n\xi)$. Z tego drugiego wynika, że

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\eta^n(\zeta)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{F}\eta(\zeta)\|_{L^1(\mathbb{R})} \ \text{ oraz} \\ \|\mathcal{F}\eta^n(\zeta)|\zeta|^M\|_{L^1(\mathbb{R})} &= n^{-M}\|\mathcal{F}\eta(\zeta)|\zeta|^M\|_{L_1(\mathbb{R})} \text{ dla } M>0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Ponadto dla dowolnych $r, M > 0$ zachodzi

$$\int_{|\xi|>r} |\mathcal{F}\eta^n(\xi)|\, d\xi \to 0 \text{ oraz} \int_{|\xi|>r} |\xi|^M |\mathcal{F}\eta^n(\xi)|\, d\xi \to 0. \tag{3.41}$$

Powyższe nierówności wynikają z zamiany zmiennych, a druga dodatkowo ze skończoności całki $\|\,|\xi|^{2k}\mathcal{F}\eta(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|(-\Delta)^k\eta\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Pokażemy teraz, że $(-\Delta)^\beta f_n \to (-\Delta)^\beta f$ w $L^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^\beta f - (-\Delta)^\beta f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant \|(-\Delta)^\beta (f - f\cdot\eta^n)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + \|(-\Delta)^\beta((f - f * h_{1/n})\cdot\eta^n)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Zbadajmy drugi składnik. Z twierdzenia Parsevala i nierówności Younga mamy

$$\begin{aligned} &\|(-\Delta)^\beta((f - f * h_{1/n})\cdot\eta^n)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|\,|\xi|^{2\beta}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\eta^n(\zeta)\mathcal{F}f(\xi-\zeta)(1-e^{-c(\xi-\zeta)^2/n})\, d\zeta\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant \int |\mathcal{F}\eta^n(\zeta)| \left(\int |\xi|^{4\beta}|\mathcal{F}f(\xi-\zeta)|^{2\beta}\left(1-e^{-c(\xi-\zeta)^2/n}\right)^2 d\xi\right)^{1/2} d\zeta \end{aligned} \tag{3.43}$$

Teraz już wystarczy oszacować $|\xi|^{4\beta} \leqslant c(|\xi-\zeta|^{4\beta} + |\zeta|^{4\beta})$ oraz zastosować (3.40) w połączeniu z twierdzeniem Lebesque'a o zbieżności zmajoryzowanej.
Aby dokończyć dowód pokażemy, że $\|(-\Delta)^\beta(f - f\cdot\eta^n)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ jest dowolnie małe dla dużych n. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $R > 2$ będzie takie, że

$$\int_{|\xi|>R/2} |\xi|^{4\beta}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\, d\xi < 2^{-4\beta}(\varepsilon/4)^2. \tag{3.44}$$

Następnie wybierzmy takie $r \in (0,1)$, by zachodziło

$$\big||\xi|^{2\beta} - |\xi-\zeta|^{2\beta}\big| < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}} \quad (|\zeta| < r,\ |\xi| < R). \tag{3.45}$$

Wówczas

$$
\begin{aligned}
\|(-\Delta)^\beta(f - f\cdot\eta^n)\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\| |\xi|^{2\beta}\left(\int \mathcal{F}f(\xi-\zeta)\mathcal{F}\eta^n(\zeta)\,d\zeta - \mathcal{F}f(\xi)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \left\| \int \left(|\xi|^{2\beta} - |\xi-\zeta|^{2\beta}\right)\mathcal{F}f(\xi-\zeta)\mathcal{F}\eta^n(\zeta)\,d\zeta \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&+ \left\| \int |\xi-\zeta|^{2\beta}\mathcal{F}f(\xi-\zeta)\mathcal{F}\eta^n(\zeta)\,d\zeta \; - |\xi|^{2\beta}\mathcal{F}f(\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

Jeśli oznaczymy $g(\xi) = |\xi|^{2\beta}\mathcal{F}f(\xi)$, to drugi ze składników jest dokładnie równy $\|g * \eta^n(\xi) - g(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ i ponieważ $\mathcal{F}\eta^n$ jest aproksymacją jedności, to składnik ten dla dużych n jest mniejszy od $\varepsilon/4$. Teraz z nierówności Younga mamy

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(|\xi|^{2\beta} - |\xi-\zeta|^{2\beta}\right)\mathcal{F}f(\xi-\zeta)\mathcal{F}\eta^n(\zeta)\,d\zeta\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}\eta^n(\zeta)| \left(\int_{\mathbb{R}} \left||\xi|^{2\beta} - |\xi-\zeta|^{2\beta}\right|^2 |\mathcal{F}f(\xi-\zeta)|^2\,d\xi\right)^{1/2} d\zeta \\
&\leqslant \int_{|\zeta|>r} |\mathcal{F}\eta^n(\zeta)| \left(\int_{\mathbb{R}} \left||\xi|^{2\beta} - |\xi-\zeta|^{2\beta}\right|^2 |\mathcal{F}f(\xi-\zeta)|^2\,d\xi\right)^{1/2} d\zeta \\
&+ \int_{|\zeta|<r} |\mathcal{F}\eta^n(\zeta)| \left(\int_{|\xi|<R} \left||\xi|^{2\beta} - |\xi-\zeta|^{2\beta}\right|^2 |\mathcal{F}f(\xi-\zeta)|^2\,d\xi\right)^{1/2} d\zeta \\
&+ \int_{|\zeta|<r} |\mathcal{F}\eta^n(\zeta)| \left(\int_{|\xi|>R} \left||\xi|^{2\beta} - |\xi-\zeta|^{2\beta}\right|^2 |\mathcal{F}f(\xi-\zeta)|^2\,d\xi\right)^{1/2} d\zeta \\
&= A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

Dzięki nierówności $||\xi|^{2\beta} - |\xi-\zeta|^{2\beta}|^2 \leqslant ||\xi|^{2\beta} + |\xi-\zeta|^{2\beta}|^2 \leqslant c(|\zeta|^{4\beta} + 2|\xi-\zeta|^{4\beta})$ oraz (3.41) dla wystarczająco dużych n będzie zachodziło $A_1 < \varepsilon/4$. Korzystając z (3.45) natychmiast dostajemy $A_2 < e/4$. Aby oszacować A_3 zauważmy, że dla $|\zeta| < r$ oraz $|\xi| > R$ jest prawdą, że $|\xi| < 2|\xi - \zeta|$. Dzięki temu $||\xi|^{2\beta} - |\xi-\zeta|^{2\beta}|^2 \leqslant 2^{4\beta}|\xi-\zeta|^{4\beta}$. Stosując tą nierówność razem z (3.44) dostajemy

$$
\begin{aligned}
A_3 &\leqslant \int_{|\zeta|<r} |\mathcal{F}\eta^n(\zeta)| \left(\int_{|\xi+\zeta|>R} 2^{4\beta}|\xi|^{4\beta}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} d\zeta \\
&\leqslant \int_{|\zeta|<r} |\mathcal{F}\eta^n(\zeta)| \left(\int_{|\xi|>R/2} 2^{4\beta}|\xi|^{4\beta}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} d\zeta \\
&\leqslant \int_{|\zeta|<r} |\mathcal{F}\eta^n(\zeta)|(\varepsilon/4)\,d\zeta \leqslant \varepsilon/4.
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

□

3.7. Opis dziedziny operatora $(-\Delta)^\beta$

TWIERDZENIE 3.8. *Jeśli $f \in L^2(\mathbb{R})$, to następujące warunki są równoważne:*

(a) $f \in D((-\Delta)^\beta)$,
(b) $\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)f\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$,
(c) $\|\mathcal{F}f(\xi)(1+|\xi|)^{2\beta}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$,
(d) $\exists\, f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ $\; f_n \to f$ *w* $L^2(\mathbb{R})$ *oraz* $(-\Delta)^\beta f_n$ *zbiega w* $L^2(\mathbb{R})$,
Dodatkowo, jeśli $\beta \in (0,1)$, to możemy dopisać:
(e) $Kf \in L^2(\mathbb{R})$ *dystrybucyjnie.*

ROZDZIAŁ 4

Operator Bessela

Poniższy rozdział poświęcony jest opisowi operatora Bessela. Okeślimy jego dziedzinę i półgrupę przez niego generowaną. Podamy też podstawowe narzędzia używane do jego badania: transformatę Hankela, uogólnione przesunięcie i splot. Przy okazji udowodnimy kilka szacowań, które wykorzystamy później.

4.1. Definicja operatora L

Operator Bessela na $\mathbb{R}^+$ oznaczamy L i definiujemy przez

$$Lf = L_{a+1}f = -\frac{d^2}{dx^2}f - \frac{a}{x}\frac{d}{dx}f. \tag{4.1}$$

Parametr a jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią i nie będziemy zaznaczać, że różne wielkości (L, $\mathcal{H}$, T_t,...) od niego zależą. Jeśli $a+1 \in \mathbb{N}$, to operator L odpowiada operatorowi Laplace'a na funkcjach radialnych w $\mathbb{R}^{a+1}$. Oznaczmy $d\mu(x) = x^a dx$. Istotnym zagadnieniem jest określenie dziedziny operatora L jako podprzestrzeni wektorowej w $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$. Zrobimy to za pomocą półgrupy operatorów liniowych.

4.2. Półgrupa T_t

Rolę półgrupy ciepła w teorii operatora Bessela pełni półgrupa $\{T_t\}_{t>0}$ zadana dla $x > 0$ wzorem

$$T_t f(x) = T_t^{a+1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} T_t(x,y) f(y)\, d\mu(y), \tag{4.2}$$

gdzie jądro całkowe ma postać

$$T_t(x,y) = (2t)^{-1} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) I_{(a-1)/2}\left(\frac{xy}{2t}\right)(xy)^{-(a-1)/2}. \tag{4.3}$$

W powyższym wzorze I_ν oznacza funkcję Bessela drugiego rodzaju;

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \cdot \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}. \tag{4.4}$$

Funkcja Bessela drugiego rodzaju jest ściśle związana z funkcją Bessela pierwszego rodzaju wzorem $J_\nu(x) = i^a I_\nu(-ix)$. Przytoczymy teraz twierdzenie opisuje asymptotykę funkcji I_ν.

Twierdzenie 4.1. *Funkcja Bessela drugiego rodzaju I_ν dla $x \in \mathbb{R}^+$ spełania:*
(a) $I_\nu(x) > 0$,
(b) $I_\nu(x) = c_\nu x^\nu + O(x^{\nu+2})$ *w* $x = 0$ ($c_\nu = 2^{-\nu}\Gamma(\nu+1)^{-1}$),
(c) $\left|\sqrt{2\pi} I_\nu(x) e^{-x}\sqrt{x} - 1\right| \leqslant \frac{c}{x} \quad (x > 1)$.

Podobnie jak dla H_t zachodzi $\int_0^\infty T_t(x,y)\, d\mu(x) = 1$. Jądra $T_t(x,y)$ powstają poprzez dylatacje $T_1(x,y)$, tzn.

$$T_t(x,y) = t^{-\frac{a+1}{2}} T_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \frac{y}{\sqrt{t}}\right). \tag{4.5}$$

4.3. Dziedzina w $L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)$

Zdefinujmy dziedzinę operatora $-L$ jako generatora infinitezymalnego półgrupy T_t

$$D(-L) = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu) : \lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t} \text{ istnieje w } L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu) \Big\}. \tag{4.6}$$

Wówczas dla $f \in D(-L)$ z definicji $-Lf = \lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t}$ i ta definicja zgadza się z (4.1) dla $f \in C^2(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)$. Identycznie jak w przypadku Δ symetryczność i kontrakcyjność półgrupy T_t pociągają samosprzężoność i dodatniość operatora L na $D(L) = D(-L)$. Dzięki temu możemy napisać rozkład spektralny E', a zatem mamy również potęgi L^β, dziedziny $D(L^\beta)$, przybliżenia za pomocą operatorów ograniczonych $g_\varepsilon(L)$ oraz półgrupę $\Psi(e^{-t\lambda})$.

4.4. Transformata Hankela

Rolę transformaty Fouriera w teorii operatora Bessela gra transformata Hankela

$$\mathcal{H}f(\xi) = \mathcal{H}_{a+1} f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)\phi_\xi(x)\, d\mu(x) \qquad (f \in L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)). \tag{4.7}$$

Funkcje $\phi_\xi(x) = 2^{(a-1)/2}\Gamma((a+1)/2)(\xi x)^{-(a-1)/2} J_{(a-1)/2}(\xi x)$ są wartościami własnymi operatora L. Dokładniej

$$L\phi_\xi = \xi^2 \phi_\xi. \tag{4.8}$$

Wiele z własności transformaty Fouriera zachodzi także dla transformaty Hankela. Wśród podobieństw są: formuła na odwrócenie oraz równośc Parsevala:

$$f(\xi) = c_a \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{H}f(\xi)\phi_x(\xi)\, d\mu(\xi) \qquad (f, \mathcal{H}f \in L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)), \tag{4.9}$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x)g(x)\, d\mu(x) = c_a \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{H}f(\xi)\mathcal{H}g(\xi)\, d\mu(\xi) \qquad (f, g \in L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)). \tag{4.10}$$

Ponadto $\mathcal{H}^{-1} = c_a \mathcal{H}$.

Jest dobrze znane, że miara spektralna E' ma postać

$$E'(\omega)f = \mathcal{H}(\chi_{\sqrt{\omega}}(\xi)\mathcal{H}f(\xi)) \qquad (\omega \in Bor(\mathbb{R}^+)), \tag{4.11}$$

gdzie tym razem $\chi_{\sqrt{\omega}}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $\sqrt{\omega} = \{\xi \in \mathbb{R}^+ : \xi^2 \in \omega\}$. Podobnie jak dla operatora Laplace'a i transformacji Fouriera można pokazać, że

$$D(L^\beta) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu) : \|\mathcal{H}f(\xi)\, |\xi|^{2\beta}\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} < \infty \}, \tag{4.12}$$

$$\mathcal{H}(L^\beta f)(\xi) = |\xi|^{2\beta}\mathcal{H}f(\xi), \tag{4.13}$$

$$\Psi(e^{-t\lambda})f = H_t f \text{ dla } f \in L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu). \tag{4.14}$$

Oznaczmy przez $\|\cdot\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}}$ normę Sobolewa związaną z transformatą Hankela;

$$\|f\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}} = \|(1+\xi)^{2\beta}\mathcal{H}f(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} \tag{4.15}$$

Z analogicznych powodów co dla $-\Delta$ zachodzi porównywalność

$$c^{-1}\|f\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} + \|L^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} \leqslant c\|f\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}}. \tag{4.16}$$

4.5. Opis dziedziny operatora L^β

TWIERDZENIE 4.2. *Jeśli* $f \in L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$, *to następujące warunki są równoważne:*

(a) $f \in D(L^\beta)$,
(b) $\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)f\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} < \infty$,
(c) $\|\mathcal{H}f(\xi)(1+|\xi|)^{2\beta}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} < \infty$.

4.6. Uogólnione przesunięcie i splot

Wprowadzimy teraz kilka narzędzi, które są używane w tej teorii. Jako operatorów przesunięć w tej teorii używa się operatorów uogólnionych przesunięć

$$\mathbf{T}^y f(x) = \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right) dv(\theta), \tag{4.17}$$

gdzie $dv(\theta) = \pi^{-1/2}\Gamma((a+1)/2)\Gamma(a/2)^{-1}(\sin\theta)^{a-1}\chi_{[0,\pi]}(\theta)\,d\theta$ jest miarą probabilistyczną. Operator ten ma także inną prezentację;

$$\mathbf{T}^y f(x) = \int_{|x-y|}^{x+y} f(z)\,dW_{x,y}(z). \tag{4.18}$$

Tutaj $W_{x,y}(z)$ jest miarą probabilistyczną o nośniku w $[|x-y|, x+y]$ daną wzorem

$$dW_{x,y}(z) = 2^{a-2}\Gamma((a+1)/2)\Gamma(a/2)^{-1}\pi^{-1/2}\frac{\triangle(x,y,z)^{a-2}}{(xyz)^{a-1}}\,d\mu(z). \tag{4.19}$$

W tym wzorze $\triangle(x,y,z)$ jest polem trójkąta o bokach x, y, z, które są takie, by trójkąt ten istniał (tzn. $x, y, z \geqslant 0$ oraz $|x-y| \leqslant z \leqslant x+y$). Z powyższego wzoru natychmiast widać, że $dW_{x,y}(z)\,d\mu(y) = dW_{x,z}(y)\,d\mu(z)$. To natomiast implikuje samosprzężoność operatorów $\mathbf{T}^y$, $y \geqslant 0$ na $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$, tzn.

$$\int_{R^+} \mathbf{T}^y f(x) g(x)\,d\mu(x) = \int_{R^+} f(x)\mathbf{T}^y g(x)\,d\mu(x). \tag{4.20}$$

Warto w tym miejscu zauważyć, że powyższy wzór jest prawdziwy nie tylko dla $f, g \in L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$, ale również dla innych, odpowiednich, par funkcji; na przykład gdy $f \in L^1(\mathbb{R}^+, d\mu), g \in L^\infty(\mathbb{R}^+, d\mu)$.

LEMAT 4.3. *Dla dowolnego* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *zachodzi*

$$\|\mathbf{T}^y f\|_{L^p(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+, d\mu)}. \tag{4.21}$$

Dowód. Jest oczywiste, że wzór (4.21) dla $p = \infty$ jest prawdziwy. Niech $\psi(x,y,z)$ będzie funkcją określoną dla $x, y, z \geqslant 0$, która jest równa 1, gdy $|x-y| \leqslant z \leqslant x+y$ i 0 w przeciwnym wypadku. Dla $1 \leqslant p < \infty$ dzięki nierówności Höldera mamy

$$|\mathbf{T}^y f(x)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^+} f(z)\psi(x,y,z)\,dW_{x,y}(z)\Big| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^+} |f(z)|^p \psi(x,y,z)\,dW_{x,y}(z)\right)^{1/p}, \tag{4.22}$$

ponieważ $dW_{x,y}(z)$ jest miarą probabilistyczną. Tak więc

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}^y f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+, d\mu)} &= \int_{\mathbb{R}^+} |\mathbf{T}^y f(x)|^p\,d\mu(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} |f(z)|^p \psi(x,y,z)\,dW_{x,y}(z)\,d\mu(x)\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^+} |f(z)|^p \int_{|y-z|}^{y+z} dW_{z,y}(x)\,d\mu(z) \leqslant \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+, d\mu)}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

□

Za pomocą operatorów przesunięcia $\mathbf{T}^y$ definiujemy uogólniony splot wzorem

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(y)\, \mathbf{T}^y g(x)\, d\mu(y) \qquad \big(f, g \in L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)\big). \tag{4.24}$$

TWIERDZENIE 4.4. *Dla* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)$ *zachodzą wzory*

(a) $\mathbf{T}^y \phi_\xi(x) = \phi_\xi(x)\phi_\xi(y)$,
(b) $\mathcal{H}(\mathbf{T}^y f)(\xi) = \phi_\xi(y)\mathcal{H}f(\xi)$,
(c) $\mathcal{H}(f \star g) = \mathcal{H}f \cdot \mathcal{H}g$,
(d) $(\mathbf{T}^y f) \star g = f \star (\mathbf{T}^y g) = \mathbf{T}^y(f \star g)$.

Dowód. Dowód podpunktu (a) można znaleźć na przykład w [**12**]. Korzystając z (a) łatwo sprawdzamy (b);

$$\mathcal{H}(\mathbf{T}^y f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{T}^y f(x)\phi_\xi(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)\mathbf{T}^y\phi_\xi(x)\, d\mu(x) = \phi_\xi(y)\mathcal{H}f(\xi). \tag{4.25}$$

Następnie udowodnimy (c);

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f \star g) &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{T}^x f(y) g(x)\, d\mu(x)\phi_\xi(y)\, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{H}(\mathbf{T}^x f)(\xi) g(x)\, d\mu(x) \\ &= \mathcal{H}f(\xi)\int_{\mathbb{R}^+} g(x)\phi_\xi(x)\, d\mu(x) = \mathcal{H}f \cdot \mathcal{H}g. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Wszystkie funkcje z podpunktu (d) należą do $L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)$ dzięki lematowi 4.3 oraz łatwej do sprawdzenia nierówności $\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)}$. Aby pokazać równości sprawdzimy równości transformat Hankela, które dzięki podpunktom (a) i (c) są oczywiste.

□

4.7. Szacowania

W rozdziale piątym będziemy potrzebować kilku faktów o transformacie Hankela, uogólnionym przesunięciu i splocie. Dla funkcji $f \in C_c^n$ z definicji

$$\|f\|_{C^n} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + ... + \|f^{(n)}\|_\infty \tag{4.27}$$

LEMAT 4.5. *Jeśli* $f \in C_c^{2k}(1/2, 2)$ *dla pewnego* $k \in \mathbb{N}$, *to*

(a) $\|\mathcal{H}f\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu(x))} \leqslant c\|f\|_\infty$,
(b) $|\mathcal{H}f(\xi)| \leqslant c\,(1 + |\xi|)^{-2k}\|f\|_{C_c^{2k}(1/2,2)}$.

Dowód. Korzystając z (4.7) oraz tego, że $\|\phi_\xi\|_\infty \leqslant 1$ natychmiast dostajemy (a). Podpunkt (b) wynika z (a) oraz szacowania

$$\xi^{2k}|\mathcal{H}f(\xi)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^+} L^k\phi_\xi(x) f(x)\, d\mu(x)\Big| = \Big|\int_{\mathbb{R}^+} \phi_\xi(x) L^k f(x)\, d\mu(x)\Big| \leqslant c\|f\|_{C_c^{2k}(1/2,2)} \tag{4.28}$$

w którym skorzystaliśmy ze wzoru (4.8), postaci operatora L i tego, że nośnik $f, f', ..., f^{(2k)}$ jest w $(1/2, 2)$.

□

Oznaczmy $w_\delta(x) = (1 + x)^\delta$.

LEMAT 4.6. *Załóżmy, że* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+, w_\delta\, d\mu)$ *dla* $\delta > 0$. *Wtedy*

$$\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^+, w_\delta\, d\mu)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+, w_\delta\, d\mu)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+, w_\delta\, d\mu)}. \tag{4.29}$$

Dowód. Używając (4.18) mamy

$$\mathbf{T}^y w_\delta(x) = \int_{|x-y|}^{x+y} (1+z)^\delta \, dW_{x,y}(z) \leqslant (1+x+y)^\delta \leqslant w_\delta(x) w_\delta(y) \tag{4.30}$$

Dzięki temu

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+} |f \star g(x)| w_\delta(x) \, d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^+} \Big| \int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{T}^y f(x) g(y) \, d\mu(y) \Big| w_\delta(x) \, d\mu(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^+} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{T}^y(|f|)(x) w_\delta(x) \, d\mu(x) \, d\mu(y) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^+} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)| \mathbf{T}^y w_\delta(x) \, d\mu(x) \, d\mu(y) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)||g(y)| w_\delta(x) w_\delta(y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) \\
&\leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+, w_\delta \, d\mu)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+, w_\delta \, d\mu)}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

□

Dla funkcji określonych na $\mathbb{R}^+$ zdefiniujmy dla $t > 0$

$$f_t(x) = t^{-(a+1)/2} f(t^{-1/2} x). \tag{4.32}$$

Oczywiście $\|f_t\|_{L^1(\mathbb{R}^+, \, d\mu)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+, \, d\mu)}$.

Lemat 4.7. *Niech $\delta > 0$. Wtedy dla wszystkich $y, r, t > 0$ zachodzi*

$$\int_{|x-y|>r} |\mathbf{T}^y(f_t)(x)| \, d\mu(x) \leqslant (t^{-1/2} r)^{-\delta} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+, w_\delta \, d\mu)}. \tag{4.33}$$

Dowód. Oznaczmy $g(x) = x^\delta |f(x)|$. Mamy

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|>r} |\mathbf{T}^y(f_t)(x)| \, d\mu(x) &= \int_{|x-y|>r} \Big| \int_{|x-y|}^{x+y} f_t(z) \, dW_{x,y}(z) \Big| \, d\mu(x) \\
&\leqslant \int_{|x-y|>r} \int_{|x-y|}^{x+y} |f_t(z)| \left(\frac{z}{\sqrt{t}} \right)^\delta \left(\frac{z}{\sqrt{t}} \right)^{-\delta} dW_{x,y}(z) \, d\mu(x) \\
&\leqslant \left(\frac{r}{\sqrt{t}} \right)^{-\delta} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{|x-y|}^{x+y} g_t(z) \, dW_{x,y}(z) \, d\mu(x) \\
&= \left(\frac{r}{\sqrt{t}} \right)^{-\delta} \|\mathbf{T}^y(g_t)\|_{L^1(\mathbb{R}^+, \, d\mu)} \leqslant \left(\frac{r}{\sqrt{t}} \right)^{-\delta} \|g_t\|_{L^1(\mathbb{R}^+, \, d\mu)} \\
&\leqslant \left(\frac{r}{\sqrt{t}} \right)^{-\delta} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+, w_\delta \, d\mu)}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

□

Lemat 4.8. *Przy oznaczeniu 4.32 zachodzą wzory:*

(a) $(\mathcal{H} f_t)(\xi) = \mathcal{H} f(\sqrt{t}\xi)$,
(b) $(\mathbf{T}^y(f_t))(\xi) = t^{-(a+1)/2} (\mathbf{T}^{(y/\sqrt{t})} f)(\xi/\sqrt{t})$.

Dowód. Korzystając z (4.7) i (4.17) mamy

$$(\mathcal{H} f_t)(\xi) = t^{-(a+1)/2} \int_{\mathbb{R}^+} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \phi_\xi(x) \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x) \phi_{\sqrt{t}\xi}(x) \, d\mu(x) = \mathcal{H} f(\sqrt{t}\xi), \tag{4.35}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{T}^y(f_t))(\xi) &= t^{-(a+1)/2}\int_0^\pi f(\sqrt{(x/\sqrt{t})^2+(y/\sqrt{t})^2-2(x/\sqrt{t})(y/\sqrt{t})cos\theta})\,d\nu(\theta)\\
&= t^{-(a+1)/2}(\mathbf{T}^{y/\sqrt{t}}f)(\xi/\sqrt{t}).
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

□

Następujący lemat pochodzi z pracy **[6]** (patrz twierdzenie 2.1 z tej publikacji).

LEMAT 4.9. *Załóżmy, że* $h \in L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$ *jest funkcją różniczkowalną na* $\mathbb{R}^+$ *taką, że* $h' \in L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$. *Wtedy*

$$
\|\mathbf{T}^{y_1}h - \mathbf{T}^{y_2}h\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} \leqslant \|h'\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\,d\mu)}|y_1-y_2|. \tag{4.37}
$$

ROZDZIAŁ 5

Porównanie przestrzeni Soboleva dla $-\Delta$ i L

Głównym celem tego rozdziału jest udowodnienie szacowania na normy w przestrzeniach $W^{2,2\beta}$ i $W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}$ dla funkcji o nośniku w przedziale $(\frac{1}{2}, 2)$. Pokażemy to najpierw dla $\beta \in (0,1)$, a następnie rozszerzymy ten wynik dla dowolnych $\beta > 0$.

5.1. Ograniczoność operatorów $(-\Delta)^\beta$ i L^β z dala od nośnika

LEMAT 5.1. *Załóżmy, ża $g_\varepsilon(L)$ są przybliżeniami L^β dla $\beta \in (0,1)$ (por. (2.9)). Wtedy istnieje stała $c > 0$ taka, że dla funkcji $m \in L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$, dla których* $\operatorname{supp} m \subseteq (\frac{1}{2}, 2)$ *zachodzi*

$$\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m(x)\|_{L^2((0,1/4)\cup(4,\infty),\, d\mu)} \leqslant c\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)}. \tag{5.1}$$

Dowód. Policzmy ze wzoru (2.9)

$$g_\varepsilon(L)m(x) = c_\beta \left(\int_{\varepsilon^2}^{\infty} t^{-\beta} m(x)\,\frac{dt}{t} - \int_{\varepsilon^2}^{\infty} t^{-\beta} T_t m(x)\,\frac{dt}{t} \right). \tag{5.2}$$

Zauważmy, że w interesującym nas zbiorze $(0,1/4)\cup(4,\infty)$ pierwsza całka znika, więc przyjrzyjmy się drugiej.

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon^2}^{\infty} t^{-\beta} T_t m(x)\,\frac{dt}{t} &= \int_{\varepsilon^2}^{\infty} t^{-\beta} \int_0^{\infty} T_t(x,y)m(y)\,d\mu(y)\frac{dt}{t} \\ &= \int_{1/2}^{2} m(y) \left(\int_{\varepsilon^2}^{\infty} t^{-\beta} T_t(x,y)\frac{dt}{t} \right) d\mu(y). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Oznaczmy $U(x,y) = \int_{\varepsilon^2}^{\infty} t^{-\beta} T_t(x,y)\frac{dt}{t}$ i znajdziemy najpierw oszacowania na to wyrażenie. W poniższych obliczeniach y jest zawsze z przedziału $(1/2, 2)$, M oznacza dużą, dowolnie dobraną liczbę, a c oznacza stałą dodatnią mogącą się zmieniać, ale niezależną od t, x, y.

- Przypadek 1: $x \in (4,\infty)$. Rozbijmy całkę $U(x,y)$ na trzy części;

$$U(x,y) = \int_{\varepsilon^2}^{\infty} t^{-\beta} T_t(x,y)\frac{dt}{t} = \int_{\varepsilon^2}^{x} + \int_{x}^{x^2} + \int_{x^2}^{\infty} = U_1(x,y)+U_2(x,y)+U_3(x,y). \tag{5.4}$$

W całce $U_1(x,y)$ zmienna t jest taka, że $\frac{x}{t} \geqslant 1$, więc z twierdzenia 4.1 (c) możemy oszacować

$$\begin{aligned} T_t(x,y) &= c\,t^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)(xy)^{-a/2} I_{(a-1)/2}\left(\frac{xy}{2t}\right) \exp\left(-\frac{xy}{2t}\right)\left(\frac{xy}{2t}\right)^{1/2} \\ &\leqslant c\,t^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{16t}\right) x^{-a/2}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Korzystając z nierówności $\exp(-\frac{x^2}{16t}) \leqslant c(\frac{t}{x^2})^M$ mamy

$$U_1(x,y) = \int_{\varepsilon^2}^{x} t^{-\beta} T_t(x,y)\frac{dt}{t} \leqslant c\,x^{-a/2} \int_0^x t^{-\beta-3/2}\frac{t^M}{x^{2M}}\,dt = c\,x^{-M-a/2-\beta-1/2}. \tag{5.6}$$

Zmienna t w całkach $U_2(x,y)$ i $U_3(x,y)$ spełnia nierówność $\frac{x}{t} \leqslant 1$, więc teraz z podpunktu (b) twierdzenia 4.1 mamy

$$\begin{aligned} T_t(x,y) &\leqslant c\, t^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) x^{-(a-1)/2} \left(\frac{xy}{2t}\right)^{(a-1)/2} \\ &\leqslant c\, t^{-(a+1)/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Teraz

$$\begin{aligned} U_2(x,y) &\leqslant c \int_x^{x^2} t^{-\beta-1-(a+1)/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) dt \\ &\leqslant c \int_0^{x^2} t^{-3/2-\beta-a/2} \frac{t^M}{x^{2M}}\, dt = c\, x^{-1-2\beta-a}, \\ U_3(x,y) &\leqslant \int_{x^2}^{\infty} t^{-3/2-\beta-a/2}\, dt = c\, x^{-1-2\beta-a}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Tak więc ze wzorów (5.6), (5.8) wynika $U(x,y) \leqslant c\, x^{-1-2\beta-a}$. Dzięki temu

$$\|g_\varepsilon(L)m(x)\|_{L^2((4,\infty),\, d\mu)} \leqslant c\|m\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)}\|x^{-1-2\beta-a}\|_{L^2((4,\infty),\, d\mu)} \leqslant c\,\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)}. \tag{5.9}$$

- Przypadek 2: $x \in (0, 1/4)$. Teraz dzielimy $U(x,y)$ na dwie części;

$$U(x,y) = \int_{\varepsilon^2}^{\infty} t^{-\beta} T_t(x,y) \frac{dt}{t} = \int_{\varepsilon^2}^{x} + \int_x^{\infty} = U_1'(x,y) + U_2'(x,y). \tag{5.10}$$

Jeśli $\frac{x}{t} \geqslant 1$, to korzystając z twierdzenia 4.1 (c) dostajemy

$$\begin{aligned} T_t(x,y) &= c\, t^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) (xy)^{-a/2} I_{(a-1)/2}\left(\frac{xy}{2t}\right) \exp\left(-\frac{xy}{2t}\right) \left(\frac{xy}{2t}\right)^{1/2} \\ &\leqslant c\, t^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{64t}\right) x^{-a/2}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} U_1'(x,y) &\leqslant c \int_{\varepsilon^2}^{x} t^{-\beta-1/2} \exp\left(-\frac{1}{64t}\right) x^{-a/2} \frac{dt}{t} \leqslant c\, x^{-a/2} \int_0^x t^{-\beta-3/2} \exp\left(-\frac{1}{64t}\right) dt \\ &\leqslant c\, x^{-a/2} \int_0^x t^{M-\beta-3/2}\, dt = c\, x^{M-\beta-(a+1)/2} \leqslant c. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Przy założeniu $\frac{x}{t} \leqslant 1$ z twierdzenia 4.1 (b) mamy

$$T_t(x,y) \leqslant ct^{-1} \exp\left(-\frac{1}{16t}\right) \left(\frac{xy}{2t}\right)^{(a-1)/2} (xy)^{-(a-1)/2} \leqslant c\, t^{-(a+1)/2} \exp\left(-\frac{1}{16t}\right). \tag{5.13}$$

Dzięki temu

$$U_2'(x,y) = \int_x^{\infty} t^{-\beta} T_t(x,y) \frac{dt}{t} \leqslant c \int_0^{\infty} t^{-\beta-(a+1)/2-1} \exp\left(-\frac{1}{16t}\right) dt \leqslant c. \tag{5.14}$$

Ostatecznie dzięki (5.12) i (5.14) dostajemy

$$\|g_\varepsilon(L)m(x)\|_{L^2((0,1/4),\, d\mu)} \leqslant c\|m\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} \leqslant c\,\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} \tag{5.15}$$

Łącząc (5.9) i (5.15) dostajemy tezę.

□

Znacznie łatwiej, podobnymi metodami możemy oszacować $g_\varepsilon((-\Delta)^\beta)$, uzyskując następujący lemat.

LEMAT 5.2. *Załóżmy, ża* $g_\varepsilon(-\Delta)$ *są przybliżeniami* $(-\Delta)^\beta$ *dla* $\beta \in (0,1)$. *Wtedy istnieje stała* $c > 0$ *taka, że dla funkcji* $m \in L^2(\mathbb{R})$, *dla których* $\operatorname{supp} m \subseteq (\frac{1}{2}, 2)$ *zachodzi*

$$\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)m(x)\|_{L^2((0,1/4)\cup(4,\infty))} \leqslant c\|m\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{5.16}$$

5.2. Różnica pomiędzy $(-\Delta)^\beta$ i L^β w pobliżu nośnika

LEMAT 5.3. *Niech* $g_\varepsilon(-\Delta)$ *i* $g_\varepsilon(L)$ *będą przybliżeniami* $(-\Delta)^\beta$ *i* L^β *dla* $\beta \in (0,1)$. *Wtedy istnieje* $\phi \in C_c^\infty(\frac{1}{4}, 4)$ *oraz stała* $c > 0$ *taka, że dla wszystkich funkcji* m, *dla których* $\operatorname{supp} m \subseteq (\frac{1}{2}, 2)$, *zachodzi*

$$\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m(x) - x^{-a/2} g_\varepsilon(-\Delta)(\phi m)(x)\|_{L^2((1/4,4),\,d\mu)} \leqslant c\|m\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{5.17}$$

Dowód. Niech $\psi \in C_c^\infty(\frac{1}{4}, 4)$ będzie taka, że $\chi_{(1/2,2)} \leqslant \psi \leqslant \chi_{(1/4,4)}$. Zdefiniujmy $\phi(x) = x^{a/2}\psi(x)$. Oczywiście $\phi \in C_c^\infty(1/4, 4)$. Dla $x \in (\frac{1}{2}, 2)$ mamy

$$\begin{aligned} u(x,\varepsilon) &= g_\varepsilon(L)m(x) - x^{-a/2} g_\varepsilon(-\Delta)(\phi m)(x) \\ &= c_\beta \int_{\varepsilon^2}^\infty t^{-\beta} \left(m(x) - T_t m(x)\right) \frac{dt}{t} \\ &\quad - c_\beta x^{-a/2} \int_{\varepsilon^2}^\infty t^{-\beta} \left(m(x)\phi(x) - H_t(m\cdot\phi)(x)\right) \frac{dt}{t} \\ &= c_\beta \int_{\varepsilon^2}^\infty t^{-\beta} \left(x^{-a/2} H_t(m\cdot\phi)(x) - T_t m(x)\right) \frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Z (3.3) oraz (4.3) dostajemy

$$T_t(x,y) = \sqrt{2\pi}\, H_t(x,y)\, I_{(a-1)/2}\left(\frac{xy}{2t}\right) \left(\frac{xy}{2t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{xy}{2t}\right) (xy)^{-a/2}. \tag{5.19}$$

Dalej

$$\begin{aligned} x^{-a/2} H_t(m\cdot\phi)(x) &= x^{-a/2} \int_0^\infty H_t(x,y) m(y)\phi(y)\, dy \\ &= \int_{1/2}^2 H_t(x,y) m(y) (xy)^{-a/2}\, d\mu(y). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Łącząc trzy ostatnie wzory

$$u(x,\varepsilon) = c_\beta \int_{\varepsilon^2}^\infty t^{-\beta} \int_{1/2}^2 (xy)^{-a/2} H_t(x,y) m(y) V\left(\frac{xy}{2t}, a\right) d\mu(y) \frac{dt}{t}, \tag{5.21}$$

gdzie $V(z,a) = 1 - \sqrt{2\pi} I_{(a-1)/2}(z) z^{1/2} \exp(-z)$. Ponadto z twierdzenia 4.1 (c) zachodzi

$$\left|V\left(\frac{xy}{2t}, a\right)\right| \leqslant c \min(1, \frac{t}{xy}). \tag{5.22}$$

Następnie

$$u(x,\varepsilon) = c_\beta \int_{\varepsilon^2}^1 \ldots + c_\beta \int_1^\infty \ldots = u_1(x,\varepsilon) + u_2(x). \tag{5.23}$$

Oznaczmy

$$u_1(x,\varepsilon) = \Gamma_\varepsilon m(x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_\varepsilon(x,y) m(y)\, d\mu(y), \tag{5.24}$$

gdzie

$$\Gamma_\varepsilon(x,y) = c\chi_{(1/4,4)}(x)\chi_{(1/2,2)}(y) \int_{\varepsilon^2}^1 t^{-\beta-3/2} (xy)^{-a/2} \exp\left(\frac{(x-y)^2}{4t}\right) V\left(\frac{xy}{2t}, a\right) dt. \tag{5.25}$$

Sprawdzimy teraz, że niezależnie od $\varepsilon > 0$ i $y > 0$ zachodzi $\int_{\mathbb{R}^+} |\Gamma_\varepsilon(x,y)|\,dx \leqslant c$. Rzeczywiście dla $\varepsilon < |x-y|$ mamy

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon^2}^{(x-y)^2} t^{-\beta-1/2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dt &\leqslant c \int_0^{(x-y)^2} t^{-\beta-1/2} \frac{t^M}{(x-y)^{2M}}\, dt \\ &= c|x-y|^{1-2\beta} \end{aligned} \tag{5.26}$$

oraz

$$\int_{(x-y)^2}^{1} t^{-\beta-1/2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dt \leqslant c \int_{(x-y)^2}^{1} t^{-\beta-1/2}\, dt \leqslant c\left(1+|x-y|^{1-2\beta}\right). \tag{5.27}$$

Z połączenia (5.26) oraz (5.27) łatwo wynika $\sup_{\varepsilon>0} \int |\Gamma_\varepsilon(x,y)|\,d\mu(x) \leqslant c$. Analogicznie $\sup_{\varepsilon>0} \int |\Gamma_\varepsilon(x,y)|\,d\mu(y) \leqslant c$. Te dwa szacowania natychmiast dają ograniczoność operatorów Γ_ε na $L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$ i $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ ze wspólną stałą niezależną od ε. Z twierdzenia interpolacyjnego Riesza-Thorina są one też ograniczone na $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$ i stała nie zależy od ε. To daje

$$\sup_{\varepsilon>0} \|u_1(x,\varepsilon)\|_{L^2((1/4,4),\,d\mu(x))} \leqslant c\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} \leqslant c\|m\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{5.28}$$

Na koniec oszacujmy

$$\begin{aligned}|u_2(x)| &\leqslant c\int_{1/2}^{2} |m(y)| \int_1^\infty t^{-\beta-3/2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dt\, dy \\ &\leqslant c\int_{1/2}^{2} |m(y)| \int_1^\infty t^{-\beta-3/2}\, dt\, dy \leqslant c\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Tak więc również

$$\|u_2(x,\varepsilon)\|_{L^2((1/4,4),\,d\mu)} \leqslant c\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)}. \tag{5.30}$$

Łącząc (5.28) i (5.30) dostajemy tezę.

□

5.3. Lokalne porównanie operatorów $(-\Delta)^\beta$ i L^β

TWIERDZENIE 5.4. *Jeśli m jest funkcją o nośniku zawartym w $(\frac{1}{2}, 2)$ oraz $0 < \beta < 1$, to zachodzi równoważność*

$$m \in D(L^\beta) \iff m \in D((-\Delta)^\beta). \tag{5.31}$$

Ponadto odpowiednie normy Soboleva są porównywalne, tzn. istnieje stała c, taka że dla wszystkich funkcji m spelniających powyższe założenia zachodzi

$$c^{-1}\|m\|_{W^{2,2\beta}} \leqslant \|m\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}} \leqslant c\|m\|_{W^{2,2\beta}}. \tag{5.32}$$

Dowód. Ponieważ $\mathrm{supp}(m) \subseteq (\frac{1}{2}, 2)$, to oczywiście

$$c^{-1}\|m\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} \leqslant c\|m\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{5.33}$$

Załóżmy najpierw, że $m \in D((-\Delta)^\beta)$. Dzięki (4.16), (5.33) oraz (3.13) dostajemy

$$\begin{aligned}\|m\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}} &\leqslant c\,\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} + c\,\|L^\beta m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} \leqslant c\,\|m\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\,\|L^\beta m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} \\ &\leqslant c\,\|m\|_{W^{2,2\beta}} + c\,\|L^\beta m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Teraz, korzystając z twierdzenia o zbieżności monotonicznej,

$$\begin{aligned}\|L^\beta m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} &= \sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} \leqslant \sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m\|_{L^2((1/4,4),\,d\mu)} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m\|_{L^2((0,1/4)\cup(4,\infty),\,d\mu)}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Dzięki lematowi 5.1 oraz wzorom (5.33), (3.13) mamy

$$\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m\|_{L^2((0,1/4)\cup(4,\infty),\, d\mu)} \leqslant c\,\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} \leqslant c\,\|m\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant c\,\|m\|_{W^{2,2\beta}}. \tag{5.36}$$

Korzystając z (5.17) dostajemy

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m(x)\|_{L^2((1/4,4),\, d\mu)} &\leqslant \sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m(x) - x^{-a/2} g_\varepsilon(-\Delta)(\phi m)(x)\|_{L^2((1/4,4),\, d\mu)} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \|x^{-a/2} g_\varepsilon(-\Delta)(\phi m)(x)\|_{L^2((1/4,4),\, d\mu)} \\ &\leqslant c\,\|m\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)(\phi m)(x)\|_{L^2((1/4,4),\, d\mu)}.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Dalej

$$\begin{aligned}&\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)(\phi m)(x)\|_{L^2((1/4,4),\, d\mu)} \leqslant c\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)(\phi m)(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= c\,\|(-\Delta)^\beta(m\cdot\phi)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant c\,\|m\cdot\phi\|_{W^{2,2\beta}} \leqslant c\,\|m\|_{W^{2,2\beta}}.\end{aligned} \tag{5.38}$$

W ostatniej nierówności przywołaliśmy lemat 3.2 i to kończy dowód nierówności $\|m\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}} \leqslant c\|m\|_{W^{2,2\beta}}$ i implikacji ($\Rightarrow$).

Odwrotnie: załóżmy, że $m \in D(L^\beta)$. Korzystając z (3.13), (5.33) oraz (4.16) mamy

$$\|m\|_{W^{2,2\beta}} \leqslant c\,\|m\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}} + c\,\|(-\Delta)^\beta m\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{5.39}$$

Następnie

$$\|(-\Delta)^\beta m\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)m\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{5.40}$$

Używając (5.17) policzmy

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)(m\cdot\phi)(x)\|_{L^2(1/4,4)} &\leqslant c\sup_{\varepsilon>0} \|x^{-a/2} g_\varepsilon(-\Delta)(m\cdot\psi)(x)\|_{L^2((1/4,4),\, d\mu)} \\ &\leqslant c\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m(x) - x^{-a/2} g_\varepsilon(-\Delta)(\phi m)(x)\|_{L^2((1/4,4),\, d\mu)} \\ &\quad + c\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(L)m(x)\|_{L^2((1/4,4),\, d\mu)} \\ &\leqslant c\,\|m\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\sup_{\varepsilon\to 0} \|g_\varepsilon(L)m\|_{L^2((1/4,4),\, d\mu)} \leqslant c\,\|m\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}}.\end{aligned} \tag{5.41}$$

Ponadto

$$\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)(m\cdot\phi)\|_{L^2((0,1/4)\cup(4,\infty))} \leqslant c\,\|m\cdot\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant c\,\|m\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant c\,\|m\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}}. \tag{5.42}$$

Wzory (5.40), (5.41) i (5.42) razem dają $\|m\cdot\phi\|_{W^{2,2\beta}} \leqslant c\,\|m\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}}$. Na koniec ustalmy funkcję $\psi \in C_c^\infty(1/4,4)$, taką by $\psi(x)\phi(x) = 1$ na $(1/2,2)$. Wtedy

$$\begin{aligned}&\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)m\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(-\Delta)(m\cdot\phi\cdot\psi)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant c\,\|m\cdot\phi\cdot\psi\|_{W^{2,2\beta}} \leqslant c\,\|m\cdot\phi\|_{W^{2,2\beta}} \leqslant c\,\|m\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}},\end{aligned} \tag{5.43}$$

a to kończy dowód drugiej nierówności i implikacji ($\Leftarrow$).

□

Udowodniliśmy lokalną porównywalność operatorów $(-\Delta)^\beta$ i L^β dla $\beta \in (0,1)$. Rozszerzymy teraz ten wynik na $\beta \geqslant 1$ posługując się istotną samosprzężonością operatorów $(-\Delta)^\beta$ (patrz paragraf 2.6), ale od teraz będziemy sie zajmowali tylko jedną nierównością (potrzebną nam w dowodzie twierdzenia z rozdziału 6), a dowód drugiej pominiemy, choć podobnymi metodami można ją uzyskać.

TWIERDZENIE 5.5. *Jeśli m jest funkcją o nośniku zawartym w $(\frac{1}{2}, 2)$, to zachodzi implikacja*

$$m \in D(-\Delta) \Rightarrow m \in D(L). \tag{5.44}$$

Ponadto istnieje stała c, taka że dla wszystkich funkcji m spelniających powyższe założenia zachodzi

$$\|m\|_{W^{2,2}_{\mathcal{H}}} \leqslant c\|m\|_{W^{2,2}}. \tag{5.45}$$

Dowód. Weźmy $m \in D(-\Delta)$ o nośniku zawartym w $(\frac{1}{2}, 2)$. Wniosek 3.5 daje nam $m', m'' \in L^2(\mathbb{R})$ w sensie dystrybucyjnym. Z twierdzenia 3.7 weźmy ciąg $m_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ taki, że $m_n \to m$ w $L^2(\mathbb{R})$ oraz $-\Delta m_n$ zbiega w $L^2(\mathbb{R})$ (z domkniętości operatora zbieżność jest do $-\Delta m$). Ustalmy funkcję $\eta \in C_c^\infty(\frac{1}{4}, 4)$ spełniającą $\chi_{(\frac{1}{2},2)}(x) \leqslant \eta(x) \leqslant \chi_{(\frac{1}{4}+\frac{1}{10}, 4-\frac{1}{10})}(x)$. Teraz $m_n \cdot \eta \to m$ w $L^2(\mathbb{R})$ oraz $-\Delta(m_n \cdot \eta) \to -\Delta m$ w $L^2(\mathbb{R})$, ponieważ z lematu 3.2 mamy

$$\|m_n \cdot \eta - m\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|m_n \cdot \eta - m \cdot \eta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|m_n - m\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0, \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta(m_n \cdot \eta) - \Delta(m \cdot \eta)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant c\,\|(m_n - m)\eta\|_{W^{2,2}} \\ &\leqslant c\|m_n - m\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\| - \Delta(m_n - m)\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Dzięki powyższym rachunkom możemy bez straty ogólności przyjąć, że $\operatorname{supp} m_n \subseteq (\frac{1}{4} + \frac{1}{10}, 4 - \frac{1}{10})$. Oczywiście $-\Delta m_n = -m_n''$. Podobnie, dzięki twierdzeniu 3.5, $-\Delta m = -m''$ (przypomnijmy, że Δm oznacza działanie operatora Δ jako generatora infinitezymalnego półgrupy H_t, a m'' należy rozumieć w sensie dystrybucyjnym). Dzięki lematowi 4.5 oraz (4.12) wiemy, że $m_n \in D(L)$. Jest też wiadome, że

$$Lm_n(x) = -m_n''(x) - \frac{a}{x} m_n'(x). \tag{5.48}$$

Podobnie jak w (3.37) mamy

$$\begin{aligned} \|m_n' - m'\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{F}(m_n' - m')\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant c\|\mathcal{F}(m_n - m)\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\|\mathcal{F}(m_n'' - m'')\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{5.49}$$

więc m_n' zbiega do m' w $L^2(\mathbb{R})$. Wszystkie m_n, m_n', m_n'' mają nośnik w $(\frac{1}{4} + \frac{1}{10}, 4 - \frac{1}{10})$, więc nośniki ich granic (odp. m, m', m'') są zawarte w $(\frac{1}{4}, 4)$. Ponieważ normy w $L^2(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$ dla funkcji o nośnikach w $(\frac{1}{4}, 4)$ są równoważne, więc ze zbieżności w $L^2(\mathbb{R})$ dostajemy zbieżność w $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$, czyli:

$$m_n^{(k)} \to m^{(k)} \text{ w } L^2(\mathbb{R}^+, d\mu) \text{ dla } k = 0, 1, 2. \tag{5.50}$$

Dzięki temu oraz (5.48) mamy

$$m_n \to m \text{ w } L^2(\mathbb{R}^+, d\mu) \text{ oraz } Lm_n \to -m'' - \frac{a}{x} m' \text{ w } L^2(\mathbb{R}^+, d\mu). \tag{5.51}$$

Z domkniętości L wynika, że $m \in D(L)$ oraz $Lm(x) = -m''(x) - \frac{a}{x} m'(x)$. Na koniec sprawdzimy szacowanie norm

$$\begin{aligned} \|m\|_{W^{2,2}_{\mathcal{H}}} &\leqslant c\left(\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} + \|Lm\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)}\right) \\ &\leqslant c\left(\|m\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|m''\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|\left(\frac{a}{x}\eta(x)\right) m'(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\right) \\ &\leqslant c\left(\|m\|_{W^{2,2}} + \|m'(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right) \leqslant c\|m\|_{W^{2,2}}, \end{aligned} \tag{5.52}$$

gdzie w obliczeniach skorzystaliśmy z (4.16), (5.48), lematu 3.2 oraz (5.49).

□

TWIERDZENIE 5.6. *Załóżmy, że* $\beta > 0$ *oraz* m *jest funkcją dla której* $\operatorname{supp} m \subseteq (\frac{1}{2}, 2)$. *Wtedy*

$$m \in D((-\Delta)^\beta) \Rightarrow m \in D(L^\beta). \tag{5.53}$$

Ponadto istnieje stała c*, taka że dla wszystkich funkcji* m *spelniających powyższe założenie zachodzi*

$$\|m\|_{W^{2,2\beta}_{\mathcal{H}}} \leqslant c\|m\|_{W^{2,2\beta}}. \tag{5.54}$$

Dowód. Dla $\beta \in (0, 1]$ już pokazaliśmy tezę. Ustalmy $\beta > 1$. Weźmy takie $N \in \mathbb{N}$ oraz $\delta \in (0, 1]$, żeby $\beta = N + \delta$.

Załóżmy, że $m \in D((-\Delta)^{N+\delta})$. Z wniosku 3.1 wiemy, że jest to równoważne warunkom:

$$m \in D((-\Delta)^N), \tag{5.55}$$
$$(-\Delta)^N m \in D((-\Delta)^\delta). \tag{5.56}$$

Wniosek 3.5 mówi, że dystrybucyjne pochodne $m', m'', ..., m^{(2N)}$ są w $L^2(\mathbb{R})$. Dzięki twierdzeniu 3.7 istanieje ciąg przybliżeń $m_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ taki, że

$$m_n \to m \text{ w } L^2(\mathbb{R}), \tag{5.57}$$
$$(-\Delta)^{N+\delta} m_n \to (-\Delta)^{N+\delta} m \text{ w } L^2(\mathbb{R}). \tag{5.58}$$

Wówczas dla $\tau < N + \delta$ mamy

$$(-\Delta)^\tau m_n \to (-\Delta)^\tau m \text{ w } L^2(\mathbb{R}). \tag{5.59}$$

Identycznie jak w poprzednim twierdzeniu bez straty ogólności można przyjąć, że $\operatorname{supp} m_n \subseteq (\frac{1}{4} + \frac{1}{10}, 4 - \frac{1}{10})$. Teraz dla $k = 1, 2, \ldots, 2N$ mamy

$$\|m_n^{(k)} - m^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant c\|m_n - m\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\|m_n^{(2N)} - m^{(2N)})\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{5.60}$$

więc $m_n^{(k)} \to m^{(k)}$ w $L^2(\mathbb{R})$. To daje $\operatorname{supp} m^{(k)} \subseteq (\frac{1}{4}, 4)$.

Ponieważ $L^{N+\delta}$ jest samosprzężony, to $m \in D(L^{N+\delta})$ będzie zagwarantowane przez warunki:

$$m_n \to m \text{ w } L^2(\mathbb{R}^+, d\mu), \tag{5.61}$$
$$L^{N+\delta} m_n \text{ zbiega w } L^2(\mathbb{R}^+, d\mu). \tag{5.62}$$

Pierwsza zbieżność wynika natychmiast z (5.57) oraz porównywalności norm w $L^2(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$ dla funkcji o nośnikach w $(\frac{1}{4}, 4)$. Aby pokazać (5.62), zapiszmy

$$\begin{aligned} L^{N+\delta}(m_n - m_k) &= L^\delta((L^N - (-\Delta)^N)(m_n - m_k)) + L^\delta((-\Delta)^N(m_n - m_k)) \\ &= S_1(n,k) + S_2(n,k). \end{aligned} \tag{5.63}$$

Dla funkcji klasy $C^\infty(\mathbb{R})$ operatory $(-\Delta)^N$ i L^N wyrażają się przez złożenia wzorów różniczkowych (3.1) i (4.1). Tak więc funkcje $(L^N - (-\Delta)^N)(m_n - m_k)$ i $(-\Delta)^N(m_n - m_k)$ mają nośnik w $(\frac{1}{4}, 4)$. Możemy teraz zastosować już udowodnioną twierdzenie dla $\beta \in (0, 1]$, bo choć jest ono sformułowane dla przedziału $(\frac{1}{2}, 2)$, to można identycznymi metodami pokazać, że jest prawdziwe również dla $(\frac{1}{4}, 4)$. Mamy

$$\begin{aligned} &\|S_2(n,k)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant c\,\|(-\Delta)^N(m_n - m_k)\|_{W^{2,2\delta}} \\ &\leqslant c\,\|(-\Delta)^{N+\delta}(m_n - m_k)\|_{L^2(\mathbb{R})} + c\,\|(-\Delta)^N(m_n - m_k)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{5.64}$$

czyli $L^\delta((-\Delta)^N m_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego, więc zbiega. Dalej

$$\begin{aligned}\|S_1(n,k)\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} &\leqslant c\,\|(L^N-(-\Delta)^N)(m_n-m_k)\|_{W^{2,2\delta}}\\ &\leqslant c\,\|(-\Delta)^\delta(L^N-(-\Delta)^N)(m_n-m_k)\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &+c\,\|(-\Delta)^\delta(m_n-m_k)\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}\tag{5.65}$$

Podobnie jak wyżej drugi składnik przy $n,k\to\infty$ zbiega do 0. Zajmijmy się pierwszym. Ponieważ m_n są gładkie, to ze wzorów (3.1) i (4.1) dostajemy

$$(L^N-(-\Delta)^N)m_n(x)=\sum_{i=1}^{2N-1}\psi_i(x)m_n^{(i)}(x),\tag{5.66}$$

przy czym $\psi_i(x)$ są gładkie, nie zależą od m, i można założyć, że mają nośnik w $(\frac{1}{8},8)$. Teraz używając lematu 3.2 dostajemy

$$\begin{aligned}&\|(-\Delta)^\delta(L^N-(-\Delta)^N)(m_n-m_k)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant\sum_{i=1}^{2N-1}\|(-\Delta)^\delta(\psi_i(x)(m_n-m_k)^{(i)})\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant c\sum_{i=1}^{2N-1}\|(\psi_i(x)(m_n-m_k)^{(i)})\|_{W^{2,2\delta}}\leqslant c\sum_{i=1}^{2N-1}c_i\|(m_n-m_k)^{(i)})\|_{W^{2,2\delta}}\\ &\leqslant c\sum_{i=1}^{2N-1}\|\,|\xi|^{2\delta}\xi^i\mathcal{F}(m_n-m_k)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant c\sum_{i=1}^{2N-1}\|m_n-m_k\|_{W^{2,2\delta+i}}\\ &\leqslant c\sum_{i=1}^{2N-1}\left(\|m_n-m_k\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|(-\Delta)^{\delta+i/2}(m_n-m_k)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right).\end{aligned}\tag{5.67}$$

Dzięki 5.59 wszystkie składniki tej sumy dążą do 0 przy $n,k\to\infty$. Pokazaliśmy więc, że $\|S_2(n,k)\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)}\to 0$ przy $n,k\to\infty$, co kończy dowód $m\in D(L^{N+\delta})$.

Aby stwierdzić porównywalność norm przepiszmy obliczenia (5.63) (5.64), (5.65), (5.67) zamieniając m_n-m_k na m_n. Teraz przechodząc z n do nieskończoności dostaniemy

$$\|L^{N+\delta}m\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\,d\mu)}\leqslant c\left(\|m\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|(-\Delta)^{N+\delta}m\|_{L^2(\mathbb{R})}\right).\tag{5.68}$$

□

Następujący wniosek wyraża udowodnione twierdzenie w języku transformat Fouriera i Hankela.

WNIOSEK 5.7. *Jeśli $a,\beta>0$, to isnieje stała $c_{a,\beta}>0$ taka, że dla $m\in W^{2,\beta}$,* $\operatorname{supp} m\subseteq(\frac{1}{2},2)$, *mamy*

$$\int_{\mathbb{R}^+}|\mathcal{H}m(\zeta)|^2(1+\zeta)^{2\beta}\,d\mu(\zeta)\leqslant c_{a,\beta}\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}m(\xi)|(1+|\xi|)^{2\beta}\,d\xi,\tag{5.69}$$

gdzie $d\mu(x)=x^a dx$.

ROZDZIAŁ 6

Twierdzenie mnożnikowe na przestrzeni Hardy'ego

W tym rozdziale zdefiniujemy przestrzeń Hardy'ego $H^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)$, przytoczymy jej charakteryzację poprzez funkcję maksymalną półgrupy, a nastepnie udowodnimy pewne twierdzenie mnożnikowe dla transformaty Hankela na przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)$. Warunek na mnożnik, podobnie jak w przypadku klasycznego twierdzenia mnożnikowego dla transformaty Fouriera na przestrzeniach $L^p(\mathbb{R})$ (Hörmander [**7**]), jest wyrażony przy pomocy normy Soboleva $\|\cdot\|_{W^{2,\beta}}$.

6.1. Atomowa przestrzeń Hardy'ego

Przestrzeń $(\mathbb{R}^+,\, d\mu)$ z metryką euklidesową jest przestrzenią typu jednorodnego w sensie Coifmana-Weissa (zobacz [**3**]). Jednym z głównych własności tej przestrzeni jest warunek podwajania kuli: dla dowolnych $x, r > 0$ zachodzi

$$\mu(B(x, 2r)) \leqslant c\,\mu(B(x, r)). \tag{6.1}$$

Definicja 6.1. *Atomem na przestrzeni $(\mathbb{R}^+, d\mu)$ nazywamy funkcję $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, która spełnia*

(a) $\operatorname{supp} a \subseteq I$, *gdzie $I \subseteq \mathbb{R}^+$ jest przedziałem,*
(b) $\|a\|_\infty \leqslant (\mu(I))^{-1}$,
(c) $\int_{\mathbb{R}^+} a\, d\mu = 0$.

Z powyższej definicji natychmiast wynika, że $\int_{\mathbb{R}^+} |a|\, d\mu \leqslant 1$.

Definicja 6.2. *Atomową przestrzenią Hardyego $H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$ nazywamy zbiór wszystkich funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$, które można zapisać w postaci $f = \sum_{n=1}^\infty c_n a_n$, gdzie a_n są atomami na $(\mathbb{R}^+, d\mu)$ oraz $c_n \in \mathbb{C}$ są takie, że $\sum_{n=1}^\infty |c_n| \leqslant \infty$.*

Na przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)$ wprowadzamy normę

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|, \tag{6.2}$$

gdzie infimum jest wzięte po wszystkich przedstawieniach $f = \sum_{n=1}^\infty c_n a_n$.

Można pokazać, że przestrzeń $\mathbb{R}^+$ z powyższą norma jest przestrzenią Banacha.

Z operatorami T_t zdefiniowanymi wzorem (4.2) związany jest operator maksymalny $\mathcal{M}$ zadany przez

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{t>0} T_t f(x). \tag{6.3}$$

Przytoczymy teraz wynik z [**1**], który charakteryzuje przestrzeń $H^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)$ używając $\mathcal{M}$.

Twierdzenie 6.1. *Zachodzi równoważność*

$$f \in H^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu) \iff \mathcal{M}f \in L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu). \tag{6.4}$$

Ponadto odpowiednie normy są równoważne, tzn.

$$c^{-1}\|\mathcal{M}f\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu(x))} \leqslant \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} \leqslant c\|\mathcal{M}f\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)}. \tag{6.5}$$

6.2. Twierdzenie mnożnikowe

TWIERDZENIE 6.2. *Załóżmy, że m jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}^+$ taką, że dla pewnej liczby $\beta > (a+1)/2$ i każdej funkcji $\eta \in C_c^\infty(\frac{1}{2}, 2)$ zachodzi*

$$\sup_{t>0} \|\eta(\cdot)m(t\cdot)\|_{W^{2,\beta}} \leqslant c_\eta. \tag{6.6}$$

Wtedy operator mnożnikowy

$$S_m f(x) = \mathcal{H}(m(\cdot)\mathcal{H}f(\cdot))(x) \tag{6.7}$$

jest ograniczony na $H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$.

UWAGA 6.3. *Operator S_m na początku jest zdefiniowany tylko na $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu) \cap H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$, który jest gęstym podzbiorem $H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$. Ponieważ jednak pokażemy, że jest on ograniczony z $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu) \cap H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$ do $H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$, to z analizy funkcjonalnej wiadomo, że istnieje jedyne przedłużenie na $H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$, które również jest ograniczone (przez tą samą stałą).*

Dowód. Pokażemy, że istnieje stała $c > 0$ taka, że dla dowolnego atomu $a \in H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$ zachodzi

$$\|\mathcal{M}(S_m a)\|_{L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant c. \tag{6.8}$$

Załóżmy więc, że atom a jest związany z kulą $B(y_0, r)$. Ze wzoru (4.10) wynika, że

$$\|\mathcal{H}f\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} = c_a \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)}. \tag{6.9}$$

To natychmiast daje

$$\|S_m a\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} = c\|m\,\mathcal{H}a\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant c\,\|m\|_\infty \|\mathcal{H}a\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant c\,\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)}. \tag{6.10}$$

Skorzystamy teraz z warunku podwajania (6.1). Jest dobrze znane, że $\mathcal{M}$ jest ograniczony na $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$, tak więc z nierówności Cauchy-Schwarza dostajemy

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}(S_m a)\|_{L^1(B(y_0,2r), d\mu)} &\leqslant \mu(B(y_0, 2r))^{1/2} \|\mathcal{M}(S_m a)\|_{L^2(B(y_0,2r), d\mu)} \\ &\leqslant c\,\mu(B(y_0, r))^{1/2} \|S_m a\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} \\ &\leqslant c\,\mu(B(y_0, r))^{1/2} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant c,\end{aligned} \tag{6.11}$$

bo korzystając z warunku (b) definicji 5.1 mamy

$$\begin{aligned}\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)} &\leqslant \|a\|_{L^2(B(y_0,r), d\mu)} \leqslant \|a\|_\infty \|1\|_{L^2(B(y_0,r), d\mu)} \\ &\leqslant \mu(B(y_0, r)^{-1} \mu(B(y_0, r))^{1/2} = \mu(B(y_0, r))^{-1/2}.\end{aligned} \tag{6.12}$$

Mając na uwadze (6.11), żeby pokazać (6.8), wystarczy sprawdzić

$$\|\mathcal{M}(S_m a)\|_{L^1(B(y_0,2r)^c, d\mu)} \leqslant c. \tag{6.13}$$

W tym celu ustalmy funkcję $\psi \in C_c^\infty(\frac{1}{2}, 2)$ taką, że

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi^2\left(2^{-j}\xi\right) = 1 \quad \text{dla} \quad \xi > 0. \tag{6.14}$$

Dowód istnienia takiego ψ nie jest trudny, ale go pominiemy. Wówczas

$$m(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} m_j(\xi), \text{ gdzie } m_j(\xi) = m(\xi)\psi^2(2^{-j}\xi). \tag{6.15}$$

Aby (6.13) było prawdą wystarczy pokazać

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{M}(S_{m_j} a)\|_{L^1(B(y_0,2r)^c, d\mu)} \leqslant c. \tag{6.16}$$

Ponieważ T_t jest również operatorem mnożnikowym z mnożnikiem $e^{-t\xi^2}$, to

$$\begin{aligned} T_t S_{m_j} f(x) &= S_{e^{-t\xi^2} m_j(\xi)} = \mathcal{H}\left(e^{-t\xi^2} m_j(\xi)\mathcal{H}f(\xi)\right)(x) \\ &= M_{j,t} \star f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} M_{j,t}(x,y) f(y)\, d\mu(y), \end{aligned} \tag{6.17}$$

gdzie $M_{j,t}(x) = \mathcal{H}(m_j(\xi)e^{-t\xi^2})(x)$ oraz $M_{j,t}(x,y) = \mathbf{T}^y M_{j,t}(x)$.

Oznaczmy $\widetilde{m}_{j,t}(\xi) = m_j(2^j\xi)e^{-t2^{2j}\xi^2}$, $\widetilde{M}_{j,t}(x) = \mathcal{H}(\widetilde{m}_{j,t})$ oraz $\widetilde{M}_{j,t}(x,y) = \mathbf{T}^y \widetilde{M}_{j,t}(x)$.
Teraz z lematu 4.8 wynika, że

$$M_{j,t}(x) = 2^{j(a+1)}\widetilde{M}_{j,t}(2^j x) \quad \text{oraz} \quad M_{j,t}(x,y) = 2^{j(a+1)}\widetilde{M}_{j,t}(2^j x, 2^j y). \tag{6.18}$$

Udowodnimy teraz lemat, który daje pewne szacowania na $M_{j,t}(x)$.

LEMAT 6.3. *Jeśli m spełnia założenia twierdzenia, to istanieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich $j \in \mathbb{Z}$ oraz $r > 0$ mamy*

$$\int_{|x-y|>r} \sup_{t>0} |M_{j,t}(x,y)|\, d\mu(x) \leqslant c\,(2^j r)^{-\delta} \quad \textit{dla wszystkich} \quad y > 0, \tag{6.19}$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \sup_{t>0} |M_{j,t}(x,y) - M_{j,t}(x,y')|\, d\mu(x) \leqslant c\, 2^j |y-y'| \quad \textit{dla wszystkich} \quad y, y' > 0. \tag{6.20}$$

Dowód lematu. Mnożnik operatora $T_t S_m$ jest postaci

$$e^{-t\xi^2} m_j(\xi) = e^{-t\xi^2}\psi(2^{-j}\xi)\cdot\psi(2^{-j}\xi)m(\xi) = \lambda_{j,t}(\xi)\cdot\theta_j(\xi), \tag{6.21}$$

gdzie $\lambda_{j,t}(\xi) = e^{-t\xi^2}\psi(2^{-j}\xi)$ oraz $\theta_j(\xi) = \psi(2^{-j}\xi)m(\xi)$. Oznaczmy

$$\widetilde{\lambda}_{j,t}(\xi) = \lambda_{j,t}(2^j\xi) = e^{-t2^{2j}\xi^2}\psi(\xi), \widetilde{\theta}_j(\xi) = \theta_j(2^j\xi) = \psi(\xi)m(2^j\xi). \tag{6.22}$$

Niech $\widetilde{\Lambda}_{j,t}(x) = \mathcal{H}\widetilde{\lambda}_{j,t}(x)$ oraz $\widetilde{\Theta}_j(x) = \mathcal{H}\widetilde{\theta}_j(x)$. Z założenia istnieje stała c taka, że niezależnie od $j \in \mathbb{Z}$ zachodzi $\|\widetilde{\theta}_j\|_{W^{2,\beta}} \leqslant c$. Wniosek 5.7 daje

$$\int_{\mathbb{R}^+} |\widetilde{\Theta}_j(x)|^2(1+x)^{2\beta}\, d\mu(x) \leqslant c. \tag{6.23}$$

Ustalmy $\delta \in (0, \beta - (a+1+\varepsilon)/2)$. Stosując nierówność Cauchy-Schwarza dostajemy

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+} |\widetilde{\Theta}_j(x)|(1+x)^{\delta}\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} |\widetilde{\Theta}_j(x)|(1+x)^{\beta}\cdot(1+x)^{\delta-\beta}\, d\mu(x) \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^+} |\widetilde{\Theta}_j(x)|^2(1+x)^{2\beta}\, d\mu(x)\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^+} (1+x)^{2\delta-2\beta}\, d\mu(x)\right)^{1/2} \\ &\leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^+} (1+x)^{-a-1-\varepsilon}x^a\, dx\right)^{1/2} \leqslant c, \end{aligned} \tag{6.24}$$

ze stałą c niezależną od $j \in \mathbb{Z}$. Z drugiej strony można sprawdzić, że dla ustalonego $k \in \mathbb{Z}$ istnieje c_k takie, że

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}, t>0} \|\widetilde{\lambda}_{j,t}\|_{C^k(\frac{1}{2},2)} \leqslant c_k. \tag{6.25}$$

Korzystając z lematu 4.5 dla dowolnie dużego $N \in \mathbb{N}$ dla $x > 0$ mamy

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}, t>0} |\widetilde{\Lambda}_{j,t}(x)| \leqslant c_N(1+x)^{-N}. \tag{6.26}$$

Przypomnijmy, że $w_\delta(x) = (1+x)^\delta$. Teraz

$$\sup_{t>0} |\widetilde{M}_{j,t}(x)| = \sup_{t>0} |\mathcal{H}(\widetilde{\theta}_j\widetilde{\lambda}_{j,t})(x)| = \sup_{t>0} |\widetilde{\Theta}_j \star \widetilde{\Lambda}_{j,t}(x)| \leqslant c_N\, w_{-N} \star |\Theta_j|(x). \tag{6.27}$$

Niech N będzie tak duże, by $\|w_{-N}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,w_\delta\,d\mu)} \leqslant c$. Używając lematu (4.6) oraz (6.24) dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^+} \sup_{t>0} |\widetilde{M_{j,t}}(x)|(1+x)^\delta\,d\mu(x) \leqslant c_N\|w_{-N}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,w_\delta\,d\mu)}\|\widetilde{\Theta}_j\|_{L^1(\mathbb{R}^+,w_\delta\,d\mu)} \leqslant c. \tag{6.28}$$

W tym momencie (6.19) jest już łatwym wnioskiem z (6.18), (6.28) i lematu 4.7. Mianowicie

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|>r} \sup_{t>0} |M_{j,t}(x,y)|\,d\mu(x) &= 2^{j(a+1)}\int_{|x-y|>r} \sup_{t>0} |\mathbf{T}^{2^j y}\widetilde{M_{j,t}}(2^j x)|\,d\mu(x)\\ &\leqslant 2^{j(a+1)}\int_{|x-y|>r} \mathbf{T}^{2^j y}\left(\sup_{t>0}|\widetilde{M_{j,t}}(2^j x)|\right)\,d\mu(x)\\ &\leqslant \int_{|x-2^j y|>2^j r} \mathbf{T}^{2^j y}\left(\sup_{t>0}|\widetilde{M_{j,t}}(x)|\right)\,d\mu(x)\\ &\leqslant (2^j r)^{-\delta}\Big\|\sup_{t>0}|\widetilde{M_{j,t}}(x)|\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^+,w_\delta\,d\mu)} \leqslant c\,(2^j r)^{-\delta}.\end{aligned} \tag{6.29}$$

Zajmijmy się teraz dowodem (6.20). Oznaczmy $\widetilde{n}_{j,t}(\xi) = e^{-t2^{2j}\xi^2}\psi(\xi)e^{\xi^2}$ i rozłóżmy

$$\widetilde{m}_{j,t}(\xi) = e^{-t2^{2j}\xi^2}\psi(\xi)e^{\xi^2}\cdot\psi(\xi)m(2^j\xi)\cdot e^{-\xi^2} = \widetilde{n}_{j,t}(\xi)\cdot\widetilde{\theta}_j(\xi)\cdot e^{-\xi^2}. \tag{6.30}$$

Niech $\widetilde{N}_{j,t}(x) = \mathcal{H}\widetilde{n}_{j,t}(x)$. Podobnie jak dla $\widetilde{\lambda}$ zachodzi

$$\sup_{j\in\mathbb{Z},t>0} \|\widetilde{n}_{j,t}\|_{C^k(1/2,2)} \leqslant c_k, \tag{6.31}$$

więc dla dowolnie dużego $N \in N$ mamy

$$\sup_{j\in\mathbb{Z},t>0} |\widetilde{N}_{j,t}(x)| \leqslant c_N w_{-N}. \tag{6.32}$$

Ustalmy N takie, aby $\|w_{-N}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} \leqslant c$. Dalej, jednostajnie względem $j \in \mathbb{Z}$, szacujemy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+} \sup_{t>0} \left|\widetilde{N}_{j,t}\star\widetilde{\Theta}_j(x)\right|\,d\mu(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^+}\left(\sup_{t>0}\left|\widetilde{N}_{j,t}\right|\right)\star\left|\widetilde{\Theta}_j(x)\right|\,d\mu(x)\\ &\leqslant c_N\|w_{-N}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\,d\mu)}\|\widetilde{\Theta}_j(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\,d\mu)} \leqslant c.\end{aligned} \tag{6.33}$$

Z tego, co pokazaliśmy w rozdziale czwartym wiemy, że $\mathbf{T}^y\mathcal{H}(e^{-t\xi^2})(x) = T_t(x,y)$. Ponadto jest dobrze znane, że $\mathcal{H}(e^{-\xi^2})(x) = ce^{-x^2/4}$. Wówczas

$$\begin{aligned}&\sup_{t>0}\left|\widetilde{M}_{j,t}(x,y) - \widetilde{M}_{j,t}(x,y')\right|\\ &= \sup_{t>0}\left|\left(\widetilde{N}_{j,t}\star\widetilde{\Theta}_j\right)\star\mathbf{T}^y(\mathcal{H}(e^{-\xi^2}))(x) - \left(\widetilde{N}_{j,t}\star\widetilde{\Theta}_j\right)\star\mathbf{T}^{y'}(\mathcal{H}(e^{-\xi^2}))(x)\right|\\ &= \sup_{t>0}\left|\int_{\mathbb{R}^+}\mathbf{T}^x\left(\widetilde{N}_{j,t}\star\widetilde{\Theta}_j\right)(z)\,(T_1(z,y)-T_1(z,y'))\,d\mu(z)\right|\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^+}\mathbf{T}^x\left(\sup_{t>0}\left|\widetilde{N}_{j,t}\star\widetilde{\Theta}_j\right|\right)(z)|T_1(z,y)-T_1(z,y')|\,d\mu(z).\end{aligned} \tag{6.34}$$

Używając lematu 4.9 dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^+}|T_1(z,y)-T_1(z,y')|\,d\mu(z) \leqslant c|y-y'|. \tag{6.35}$$

Teraz dzięki (6.33), (6.34) i (6.35) dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^+}\sup_{t>0}\left|\widetilde{M}_{j,t}(x,y)-\widetilde{M}_{j,t}(x,y')\right| \leqslant c\,|y-y'|, \tag{6.36}$$

gdzie stała c nie zależy od $j \in \mathbb{Z}$. Aby dokończyć dowód wzoru (6.20) skorzystamy z (6.18) oraz (6.36). Mamy

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+} \sup_{t>0} |M_{j,t}(x,y) - M_{j,t}(x,y')| \, d\mu(x) \\
&= 2^{j(a+1)} \int_{\mathbb{R}^+} \sup_{t>0} |\widetilde{M}_{j,t}(2^j x, 2^j y) - \widetilde{M}_{j,t}(2^j x, 2^j y')| \, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \sup_{t>0} |\widetilde{M}_{j,t}(x, 2^j y) - \widetilde{M}_{j,t}(x, 2^j y')| \, d\mu(x) \leqslant c\, 2^j |y - y'|. \qquad (6.37)
\end{aligned}$$

Tak więc lemat 6.3 został udowodniony.

□

Wróćmy teraz do dowodu (6.16). Przypomnijmy, że supp $a \subseteq B(y_0, r)$. Ustalmy $K \in \mathbb{N}$ spełniające

$$2^{-K} \leqslant r < 2^{-K+1}. \qquad (6.38)$$

Rozbijmy

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{M}(S_{m_j} a)\|_{L^1(B(y_0,2r)^c,\, d\mu)} &= \sum_{j>K} \|\mathcal{M}(S_{m_j} a)\|_{L^1(B(y_0,2r)^c,\, d\mu)} \\
&+ \sum_{j\leqslant K} \|\mathcal{M}(S_{m_j} a)\|_{L^1(B(y_0,2r)^c,\, d\mu)} \\
&= S_1 + S_2. \qquad (6.39)
\end{aligned}$$

Teraz używając (6.19) mamy

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{j>K} \int_{|x-y_0|>2r} \sup_{t>0} |T_t S_{m_j} a(x)| \, d\mu(x) \\
&\leqslant \sum_{j>K} \int_{|x-y_0|>2r} \int_{|y-y_0|<r} \sup_{t>0} |M_{j,t}(x,y)||a(y)| \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\
&\leqslant \sum_{j>K} \int_{|y-y_0|<r} |a(y)| \int_{|x-y|>r} \sup_{t>0} |M_{j,t}(x,y)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) \\
&\leqslant c\, r^{-\delta} \sum_{j>K} 2^{-j\delta} \leqslant c\, 2^{\delta K} 2^{-\delta K} = c. \qquad (6.40)
\end{aligned}$$

Następnie przy pomocy warunku $\int_{\mathbb{R}^+} a(y)\, d\mu(y) = 0$ oraz (6.20) dostajemy

$$\begin{aligned}
S_2 &\leqslant \sum_{j\leqslant K} \int_{\mathbb{R}^+} \sup_{t>0} \Big| \int_{|y-y_0|<r} M_{j,t}(x,y) a(y) \, d\mu(y) \Big| \, d\mu(x) \\
&= \sum_{j\leqslant K} \int_{\mathbb{R}^+} \sup_{t>0} \Big| \int_{|y-y_0|<r} (M_{j,t}(x,y) - M_{j,t}(x,y_0)) a(y) \, d\mu(y) \Big| \, d\mu(x) \\
&\leqslant \sum_{j\leqslant K} \int_{|y-y_0|<r} |a(y)| \int_{\mathbb{R}^+} \sup_{t>0} |M_{j,t}(x,y) - M_{j,t}(x,y_0)| \, d\mu(x) \, d\mu(x) \\
&\leqslant c \sum_{j\leqslant K} 2^j \int_{|y-y_0|<r} |a(y)| \, |y - y_0| \, d\mu(y) \leqslant cr \sum_{j\leqslant K} 2^j \leqslant c. \qquad (6.41)
\end{aligned}$$

Tak więc udowodniliśmy (6.16), który był ostatnią rzeczą potrzebną do pokazania (6.8), które dzięki (6.5) daje

$$\|S_m a\|_{H^1(\mathbb{R}^+,\, d\mu)} \leqslant c, \qquad (6.42)$$

gdy a jest atomem na $(\mathbb{R}^+, d\mu)$. Weźmy teraz $f \in L^2(\mathbb{R}^+, d\mu) \cap H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$ i jej przedstawienie postaci $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j a_j$. Jeśli pokażemy, że

$$S_m f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j S_m a_j, \tag{6.43}$$

to dowód będzie zakończony, ponieważ

$$\|S_m f\|_{H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \, \|S_m a_j\|_{H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant c \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \tag{6.44}$$

i biorąc obustronnie infimum dostajemy $\|S_m f\|_{H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant c\,\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)}$.

Aby pokazać (6.43) zauważymy, że operator $S_m : L^2(\mathbb{R}^+, d\mu) \cap H^1(\mathbb{R}^+, d\mu) \to \mathcal{D}'(0,\infty)$ jest ciągły ($\mathcal{D}'(0,\infty)$ jest przestrzenią dystrybucji z funkcjami próbnymi klasy $C_c^\infty(0,\infty)$). Zauważyliśmy już, że jeśli $\psi \in C_c^\infty(0,\infty)$, to $\mathcal{H}\psi \in L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$ (por. lemat 4.5), a to daje

$$\|S_m\psi\|_\infty = \sup_{x>0} \left| \int_{\mathbb{R}^+} m(\xi)\mathcal{H}\psi(\xi)\phi_x(\xi)\, d\mu(x) \right| \leqslant \|m\|_\infty \|\mathcal{H}\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)} < \infty. \tag{6.45}$$

Ponadto

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \, \|a\|_{L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|, \tag{6.46}$$

więc $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)} \leqslant \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)}$. Zatem jeśli $H^1(\mathbb{R}^+, d\mu) \cap L^2(\mathbb{R}^+, d\mu) \ni f_n \to f$ w sensie $H^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$, to także $f_n \to f$ w $L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)$. Biorąc funkcję próbną $\phi \in C_c^\infty(0,\infty)$ mamy

$$< S_m f_n - S_m f, \phi >= \int_{\mathbb{R}^+} (f_n - f) S_{\overline{m}}\phi \, d\mu \leqslant \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R}^+, d\mu)} \|S_{\overline{m}}\phi\|_\infty \to 0, \tag{6.47}$$

co kończy dowód zapowiedzianej ciągłości. Z tego wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} < S_m f, \phi > &=< \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j a_j, S_{\overline{m}}\phi >= \sum_{j\in\mathbb{N}} < \lambda_j a_j, S_{\overline{m}}\phi > \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} < \lambda_j S_m a_j, \phi >=< \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j S_m a_j, \phi >, \end{aligned} \tag{6.48}$$

czyli (6.43) jest prawdziwe, a to kończy dowód twierdzenia.

□

Bibliografia

[1] J.J. Betancor, J. Dziubański, J.L. Torrea, *On Hardy spaces associated with Bessel operators*, ukaże się w Journal d'Analyse Mathematique, 2007.

[2] R.R. Coifman and G. Weiss, *Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes*, Lecture Notes in Math., vol. 242, Springer-Verlag, 1971.

[3] R.R. Coifman and G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 83, no. 4 (1977), 569–645.

[4] G. Garrigós and A. Seeger, *Characterizations of Hankel multipliers*, ukaże się w Mathematische Annalen.

[5] G. Gasper and W. Trebels, *A characterization of localized Bessel potential spaces an applications to Jacobi and Hankel multipliers*, Studia Math., 65 (1979), 243–278.

[6] J. Gosselin and K. Stempak, *A Weak-Type Estimate for Fourier-Bessel Multipliers*, Proc. Amer. Math. Soc., 106 (1989), no. 3, 655-662.

[7] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta. Math., vol. 104, no. 1-2 (1960), 93-140.

[8] R. Kapelko, *A multiplier theorem for the Hankel transform*, Revista Matem atica Complutense vol. 11, no. 2 (1998), 281–288.

[9] W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 2001.

[10] E. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscilary Integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[11] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[12] K. Stempak, *La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier Bessel*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I Math, 303, no. 1 (1986), 15–18.

[13] K. Stempak, *The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform*, Math. Inst. Univ. of Wrocław, Poland, preprint no. 45, 1985.

[14] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambrige University Press, Cambridge, 1966.

[15] A. Zygmund, *On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations*, J. Math. Pures Appl. (9) 35, 1956, 223–248.