Zadania 2.1.

① Obrót wokół p. $P=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ o kąt α ma wzór:

$$R_\alpha^{\binom{1}{1}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Aby móc bowiem skorzystać ze wzoru na obrót wokół $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, musimy sprawić, by punkt P znalazł się w miejscu $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, czyli dokonać translacji o wektor $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. Po wykonaniu obrotu „wracamy" do wyjściowych warunków wykonując translację o wektor przeciwny, czyli $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

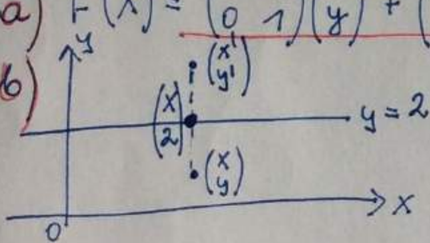
e) Podstawiając $\alpha = 30^\circ$ mamy

$$R_{\frac{\pi}{6}}^{\binom{1}{1}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}x - \frac12 y - \frac{\sqrt3}{2} + \frac12 + 1\\ \frac12 x + \frac{\sqrt3}{2}y - \frac12 - \frac{\sqrt3}{2} + 1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt3}{2}\\ \frac{1-\sqrt3}{2}\end{pmatrix} = AX+V,$$

gdzie macierz A jest taka sama, jak w ćw. 3 e).

② a) $F(X) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$; c) Analogicznie jak b);

b) 

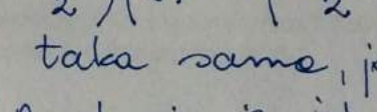
Ponieważ p. $\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ jest środkiem odcinka o końcach $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, więc $\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix} = \frac12\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$, skąd wyliczamy $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-y+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$;

d) Analogicznie jak e), bo jest to jednokładność o tym samym środku i skali (-1);

e) $\overrightarrow{SX'} = k\overrightarrow{SX}$, czyli $\begin{pmatrix}x'-2\\y'-1\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$, skąd $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x+6\\-2y+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$;

f) Analogicznie jak e);

g) — " — jak h):



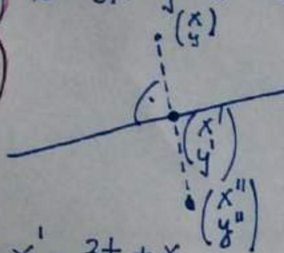
$\overrightarrow{\overline{X}X'} = k\cdot\overrightarrow{\overline{X}X}$, gdzie $\overline{X}$ jest rzutem X na oś l (tzn. prostą $x=3$)

$\begin{pmatrix}x'-3\\y'-y\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x-3\\y-y\end{pmatrix}$, skąd $x' = 2x-3$, $y' = y$, czyli $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$.

i) Ponieważ znakowana odległość p. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ od osi $y=2$, czyli prostej $y-2=0$ wynosi $d(X) = \frac{y-2}{1} = y-2$, więc $\overrightarrow{XX'} = d(X)v = (y-2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, czyli $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y-2\\0\end{pmatrix}$, skąd $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y-2\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

j) Analogicznie jak i).

③ $l: 3x-y+2=0$ ma wektor normalny $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

a) 

$\begin{cases}\overrightarrow{XX'} \parallel \vec{n}\\ X' \in l\end{cases}$, czyli $\begin{cases}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \text{ dla pewnego } t\in\mathbb{R}\\ 3x'-y'+2=0\end{cases}$

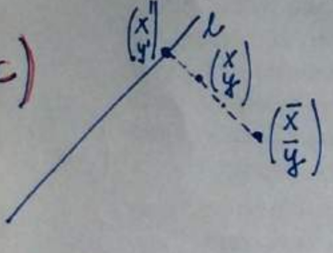
$(*)\begin{cases}x'=3t+x\\y'=-t+y\end{cases}$

$3(3t+x)-(-t+y)+2=0$, $\quad 10t = \cancel{-3y} -3x+y-2$, skąd $t=\frac{1}{10}(-3x+y-2)$

Wstawiając do $(*)$: $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}(x+3y)-\frac{3}{5}\\ \frac{1}{10}(3x+9y)+\frac{1}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

b) Ponieważ $X'=\dfrac{X+X''}{2}$ (rysunek), więc $X''=2X'-X=$

$\begin{pmatrix}\frac{2}{10} & \frac{6}{10}\\ \frac{6}{10} & \frac{18}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}-1 & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & +\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$

c) 

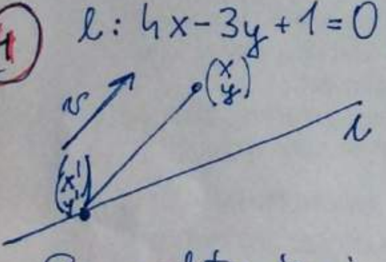
$\overrightarrow{X'\bar{X}}=4\overrightarrow{X'X}$ (Uwaga! Zmiana oznaczeń w porównaniu z zad. 2, tu: rzut $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ na l to $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$)

$\bar{X}-X'=4(X-X')$

$\bar{X}=4X-3X'=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & \frac{9}{10}\\ \frac{9}{10} & \frac{27}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{9}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{37}{10} & -\frac{9}{10}\\ -\frac{9}{10} & \frac{13}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{9}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

d) Analogicznie jak c).

④ $l: 4x-3y+1=0$, $v=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$



$\begin{cases}\overrightarrow{XX'}=tv\\ X'\in l\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x'-x=t\cdot 2\\ y'-y=t\cdot 3\\ 4x'-3y'+1=0\end{cases}$, skąd $\left.\begin{matrix}x'=2t+x\\ y'=3t+y\end{matrix}\right\}(*)$

$4(2t+x)-3(3t+y)+1=0$

$t=4x-3y+1$

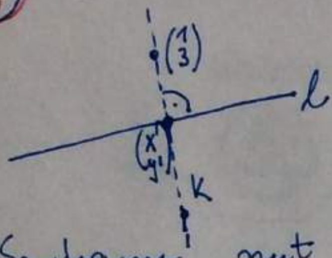
Po podstawieniu do $(*)$ $\quad\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9x-6y+2\\12x-8y+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -6\\ 12 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

⑤ $l: 3x+4y-1$, $v=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. Tu $d(X)=\dfrac{3x+4y-1}{\sqrt{16+9}}=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}$ oraz $\overrightarrow{XX'}=d(X)v$,

tzn. $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\left(\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{5}x+\frac{16}{5}y-\frac{4}{5}\\ -\frac{9}{5}x-\frac{7}{5}y+\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{5} & \frac{16}{5}\\ -\frac{9}{5} & -\frac{7}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$

⑥ Do wyprowadzonych wzorów za $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ podstawiamy $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(7) Można analogicznie jak w zad. 3a), albo tak:



$l: x+y+1=0$, $\vec{n} = \binom{1}{1}$

$k \perp l$ oraz $\binom{1}{3} \in k$, więc prosta k ma postać:

$k: x-y+2=0$

Szukany rzut $\binom{x'}{y'}$ p. $\binom{1}{3}$ na l to punkt wspólny l i k:

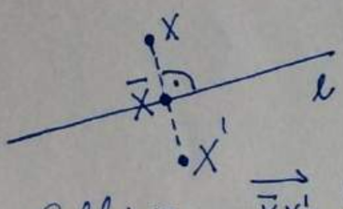
$$\begin{cases} x'+y'+1=0 \\ x'-y'+2=0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{array}{l} x'=-\frac{3}{2} \\ y'=\frac{1}{2} \end{array}, \text{ tzn. } X' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Natomiast p. symetryczny X'' p. $\binom{1}{3}$ względem l spełnia warunek: $X' = \frac{X+X''}{2}$, czyli $X'' = 2X' - X = \binom{-3}{1} - \binom{1}{3} = \binom{-4}{-2}$.

(8) a) Symetria środkowa : $\overrightarrow{SX'} = -\overrightarrow{SX}$

Jednokładność z $k=-1$: $\overrightarrow{SX'} = (-1)\cdot\overrightarrow{SX}$;

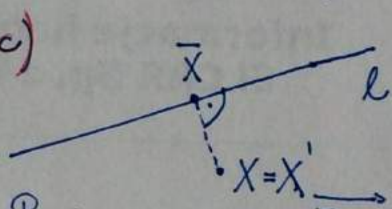
b)



Odbicie : $\overrightarrow{\bar{X}X'} = -\overrightarrow{\bar{X}X}$

Powinowactwo : $\overrightarrow{\bar{X}X'} = (-1)\overrightarrow{\bar{X}X}$

c)



Powinowactwo : $\overrightarrow{\bar{X}X'} = \overrightarrow{\bar{X}X}$

Identyczność : $X' = X$

Zadania 2.2.

(3) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1+w_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$, jeśli $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\text{ozn.}}{=} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = (k_1, k_1+k_2)$, jeśli $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\text{ozn.}}{=} (k_1, k_2)$ itd.

(4) $F(\alpha u + \beta v) \overset{\text{addyt.}}{=} F(\alpha u) + F(\beta v) \overset{\text{jednorod.}}{=} \alpha F(u) + \beta F(v)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Kładąc $\alpha = 1$, $\beta = -1$ mamy z powyższego:

$F(u+(-1)v) = \cancel{F(u-v)}\ 1\cdot F(u) + (-1)F(v) = F(u) - F(v)$.

$\quad \| $

$F(u-v)$

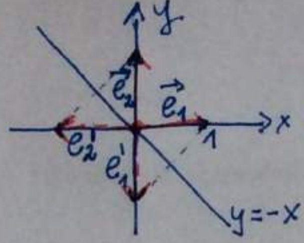
(5) Zauważmy, że $v = 2v - v = (u+2v) - (u+v)$, czyli

$$F(v) = F(u+2v) - F(u+v) = \binom{1}{7} - \binom{-1}{3} = \binom{2}{4}$$

Dalej $u = (u+v) - v$, czyli $F(u) = F(u+v) - F(v) = \binom{-1}{3} - \binom{2}{4} = \binom{-3}{-1}$

oraz $F(4u+3v) = 4F(u) + 3F(v) = 4\binom{-3}{-1} + 3\binom{2}{4} = \binom{-12+6}{-4+12} = \binom{-6}{8}$.

6 a)

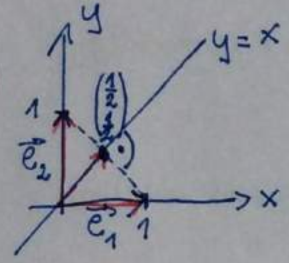


$$S(\vec{e}_1) = S\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$S(\vec{e}_2) = S\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$, a ponieważ macierz przekształcenia tworzą obrazy versorów,

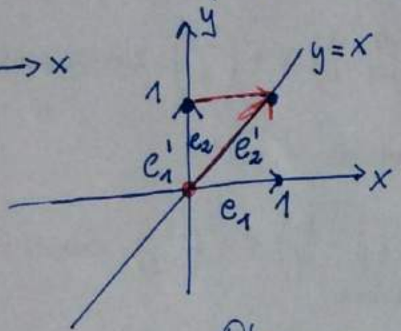
to $m(S) = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$;

b)



$$\mathcal{P}(\vec{e}_1) = \mathcal{P}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \quad m(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix};$$

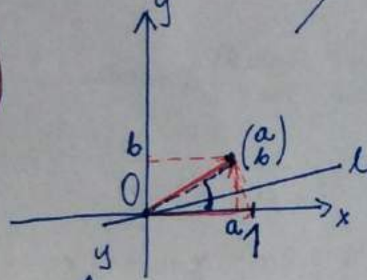
c)



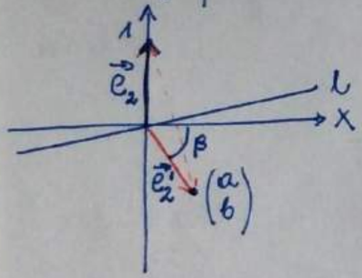
$$\mathcal{P}\left(\vec{e}_1\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$m(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix};$$

d)



Obrazem $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ jest wektor o końcu $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ (i początku w $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$). Jest on nachylony do osi OX pod kątem $\alpha = 30°$, a więc $\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{b}{1}$ (długość obrazu $\vec{e}_1$ wynosi 1). Stąd $b = \frac{1}{2}$ oraz skoro $a^2+b^2=1$, więc $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Obrazem $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ jest wektor o końcu $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ nachylony do osi OX pod kątem $\beta = -60°$ i długości 1. Stąd $\sin\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{1}$, czyli $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $a = \frac{1}{2}$

Zatem $S(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $S(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$, $m(S) = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

7 a) np. $F\left(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + F\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$F\left(\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}\right) = F\left(-2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = (-2)\cdot F\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, czyli $\begin{matrix}a+4b=2\\c+4d=3\end{matrix}$

$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, czyli $\begin{matrix}2a+b=1\\2c+d=1\end{matrix}$

$\begin{cases}a+4b=2\\2a+b=1\end{cases}$ $\begin{cases}c+4d=3\\2c+d=1\end{cases}$, stąd $\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{pmatrix}$

Obliczając np. $F\left(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{21}{7}\\ \frac{28}{7}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, jak wyżej.

(8) Ponieważ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, więc $F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=F\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)-F\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Ponadto $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, a więc $F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=2F\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)-F\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$,

skąd mamy już macierz szukanego przekształcenia:

$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-2\end{pmatrix}$, czyli $F(X)=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-2\end{pmatrix}X$.

(9) Mamy $F(X)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$, przy czym

$\begin{cases}3a+2b+e=1\\2a+b+e=0\\a+b+e=4\end{cases}$ oraz $\begin{cases}3c+2d+f=0\\2c+d+f=1\\c+d+f=1\end{cases}$, skąd $F(X)=\begin{pmatrix}-4&5\\0&-1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

(10) - podane w Odpowiedziach w skrypcie.

(11) a) Szukamy $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ takiego, by $F(X)=X$, czyli

$\begin{cases}x=x\\2x+y+2=y\end{cases}$ tzn. $\begin{cases}x\in\mathbb{R} \text{ (dowolna liczba rzeczywista)}\\2x=-2\end{cases}$

czyli $x=-1$ oraz $y\in\mathbb{R}$. Jest to więc prosta $x=-1$.

b), c) - analogicznie

(12) - podane w Odpowiedziach w skrypcie

(13) $\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, czyli $\begin{cases}2x+3y=5\\-x=2\end{cases}$, skąd $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

(14) Szukamy $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=X$, czyli $\begin{cases}y-2=x\\-x+4=y\end{cases}$.

Stąd $x=3$, $y=1$, tzn. punkt stały F to $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Jest to jednocześnie środek tego F, bo środek jest jedynym punktem stałym obrotu.

(15) Podobnie, jak w zadaniu 14, otrzymujemy układ równań: $\begin{cases}\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1=x\\\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=y\end{cases}$, czyli $\begin{cases}-2x+4y+5=0\\4x-8y-10=0\end{cases}$. Jest to układ nieoznaczony, którego rozwiązaniem jest prosta $-2x+4y+5=0$. Jako zbiór punktów stałych odbicia jest jego osią.

(8) Ponieważ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, więc $F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) - F\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Ponadto $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, a więc $F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 2F\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) - F\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$,

skąd mamy już macierz szukanego przekształcenia:

$\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}$, czyli $F(X) = \begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}X$.

(9) Mamy $F(X) = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$, przy czym

$\begin{cases}3a+2b+e=1\\2a+b+e=0\\a+b+e=4\end{cases}$ oraz $\begin{cases}3c+2d+f=0\\2c+d+f=1\\c+d+f=1\end{cases}$, skąd $F(X) = \begin{pmatrix}-4 & 5\\0 & -1\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

(10) – podane w Odpowiedziach w skrypcie.

(11) a) Szukamy $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ takiego, by $F(X) = X$, czyli

$\begin{cases}x = x\\2x+y+2=y\end{cases}$ tzn. $\begin{cases}x\in\mathbb{R} \text{ (dowolna liczba neczywista)}\\2x=-2\end{cases}$

czyli $x=-1$ oraz $y\in\mathbb{R}$. Jest to więc prosta $x=-1$.

b), c) – analogicznie

(12) – podane w Odpowiedziach w skrypcie

(13) $\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, czyli $\begin{cases}2x+3y=5\\-x=2\end{cases}$, skąd $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

(14) Szukamy $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = X$, czyli $\begin{cases}y-2=x\\-x+4=y\end{cases}$.

Stąd $x=3$, $y=1$, tzn. punkt stały F to $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Jest to jednocześnie środek tego F, bo środek jest jedynym punktem stałym obrotu.

(15) Podobnie, jak w zadaniu 14, otrzymujemy układ równań: $\begin{cases}\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1=x\\\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=y\end{cases}$, czyli $\begin{cases}-2x+4y+5=0\\4x-8y-10=0\end{cases}$. Jest to układ nieoznaczony, którego rozwiązaniem jest prosta $-2x+4y+5=0$. Jako zbiór punktów stałych odbicia jest jego osią.