Zadania 8.1 Odpowiedzi

1. Wektory i wartości własne.

   (a) Płaszczyzna π jest rozpięta na przykład na wektorach $\overrightarrow{a} = (1\,0\,2)^T$ i $\overrightarrow{b} = (0\,1\,3)^T$. Wektorem symetrycznym wektora z płaszczyzny π jest on sam. Dlatego też każde takie dwa niewspółliniowe wektory np. $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są wektorami własnymi tego przekształcenia z wartość własną równą 1. Natomiast dla wektorów spoza płaszczyzny π przekształcenie ma wartość własną równą -1, a wektorem własnym jest wektor prostopadły do płaszczyzny π np. $(2\,3\,-1)^T$.

   (b) Niech R będzie rzutem punktu $X = (x\,y\,z)^T$ na płaszczyznę π, a X' oznacza obraz punktu X względem zadanego powinowactwa. Wtedy

$$\overrightarrow{RX'} = -2\overrightarrow{RX}, \text{ czyli } X' = 3R - 2X.$$

   Dla każdego wektora z płaszczyzny π jego rzutem na tę płaszczyznę jest on sam. Wtedy z powyższego wzoru mamy $X' = X$. Oznacza to, że wartością własną przekształcenia jest liczba 1, natomiast wektorami własnymi wektory rozpinające zadaną płaszczyznę np. $(1\,0\,-2)^T$ i $(0\,1\,-1)^T$. Dla wektorów spoza płaszczyzny π mamy $R = 0$, czyli $X' = -2X$. Stąd wartością własną będzie liczba -2, a wektorem własnym wektor prostopadły do zadanej płaszczyzny np. $(2\,1\,1)^T$.
   Inny sposób rozwiązania tego zadania polega na wyznaczeniu macierzy przekształcenia zadanego powinowactwa prostokątnego, jej wielomianu charakterystycznego, a z niego wartości własnych. Rzut R punktu X na zadaną płaszczyznę ma współrzędne $\frac{1}{6}(2x - 2y - 2z, -2x + 5y - z, -2x - y + 5z$. Wtedy

$$X' = 3R - 2X = \frac{1}{2}(-2x-2y-2z \quad -2x+y-z \quad -2x-y+z)^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X$$

   Następnie

$$\begin{vmatrix} -1-t & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}-t & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t \end{vmatrix} = (t-1)(t^2+t-2).$$

   Stąd otrzymujemy wartości własne:

$$(t-1)(t^2+t-2) = 0, \text{ czyli } t_1 = 1,\ t_2 = -2,\ t_3 = 1,$$

   a potem wektory własne.

   (c) Podobnie jak w podpunkcie a), mamy podwójną wartość własną równą 1 z wektorami własnymi, które rozpinają tę płaszczyznę np. $(4\,0\,1)^T$ i $(0\,2\,1)^T$. Druga wartość własna jest równa 0, a wektor własny jest postaci $t(1\,1\,1)^T$.

2. Wielomian charakterystyczny jest postaci $(a-t)(d-t)(f-t)$, a więc wartości własne to $t = a,\ t = d,\ t = f$. Wektory własne są następujące:

   - dla $t = a$ to $(1\,0\,0)^T$,
   - dla $t = d$ to $(\frac{b}{d-a}\,1\,0)^T$,
   - dla $t = f$ to $(\frac{be-c(d-f)}{(a-f)(d-f)} \quad -\frac{e}{d-f} \quad 1)^T$.

3. Jeżeli F jest izometrią, to $|F(X)| = |X|$. Dla t wartości własnej mamy natomiast $F(X) = tX$. Zatem $F(X)| = |tX| = |t| \cdot |X| = |X|$. Stąd $|t| = 1$. Dla rzeczywistych t zachodzi:

   - Jeżeli $t = 1$, to izometria jest obrotem.
   - Jeżeli $t = -1$, to izometria jest symetrią, czyli odbiciem względem płaszczyzny.

4. Macierzą obrotu wokół osi OZ jest

$$M = \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   a wielomian chrakterystyczny jest postaci $(1-t)(t^2 - 2tcos\phi + 1)$. Pierwiastki tego wielomianu, czyli wartości własne to $t = 1,\ t = e^{i\phi},\ t = e^{-i\phi}$.

5. Wykorzystamy następującą własność macierzy:

$$|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}\ \ \overrightarrow{v}\ \ \overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}\ \ \overrightarrow{v}\ \ \overrightarrow{w}| + |\overrightarrow{u'}\ \ \overrightarrow{v}\ \ \overrightarrow{w}|,$$

   która jest prawdziwa dla każdej kolumny i każdego wiersza macierzy. Mamy zatem kolejno

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+0 & a_{22}-t & a_{23} \\ a_{31}+0 & a_{32} & a_{33}-t \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -t & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-t & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33}-t \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -t & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33}-t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -t \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} -t & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33}-t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -t & 0 & a_{13} \\ 0 & -t & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-t \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -t & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & -t & 0 \\ a_{31} & 0 & -t \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -t & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -t & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & -t \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} -t & 0 & a_{13} \\ 0 & -t & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-t \end{vmatrix} \\
&= |A| - D_{22}t + a_{11}t^2 - D_{33}t - D_{11} + a_{22}t^2 - t^3 + a_{33}t^2 \\
&= -t^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 - (\sum_{i=1}^{3} D_{ii})t + |A| \\
&= -t^3 + (tr\, A)t^2 - (\sum_{i=1}^{3} D_{ii})t + |A|,
\end{aligned}$$

   gdzie D_{ii} jest wyznacznikiem macierzy, która powstaje z macierzy A po wykreśleniu wiersza o indeksie i oraz kolumny o indeksie i.

6. Ponieważ
$$\begin{vmatrix} p-t & 0 & 0 \\ 0 & a-t & b \\ 0 & c & d-t \end{vmatrix} = (p-t)\cdot \begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix},$$
więc wartościami własnymi są liczby p, $\lambda_1,\ \lambda_2$.

7. Jeżeli $AX = tX$, to $A^3X = A^2(tX) = tA^2X = t^2AX = t^3X$. Jeżeli ponadto $A^3 = A$, to $tX = t^3X$, co daje równość $t = t^3$. Stąd $t = 0,\ t = -1,\ t = 1$.

8. Jeżeli taki wielomian miałby nierzeczywisty pierwiastek, to jego sprzężenie też byłoby pierwiastkiem. To oznaczoby jednak, że ten wielomian musiałby być przynajmniej czwartego stopnia.

9. Ponieważ całą przestrzeń rozpinają np. wektory
$$\overrightarrow{e_1} = (1\ 0\ 0)^T,\ \overrightarrow{e_2} = (0\ 1\ 0)^T,\ \overrightarrow{e_3} = (0\ 0\ 1)^T,$$
to z warunków zadania mamy następujące zależności:
$$A\overrightarrow{e_1} = \lambda\overrightarrow{e_2},\ A\overrightarrow{e_2} = \lambda\overrightarrow{e_2},\ A\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_3}.$$
Rozwiązując te równania ze względu na nieznane wyrazy macierzy A otrzymamy, że $A = \lambda \cdot I$.