Zadania 2.3

1. Wyznaczymy najpierw wzory przekształceń P_l i S_l.

- Ponieważ $\vec{n}_l = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, więc prosta $k \perp l$ ma postać:

$$k: \begin{cases} u = t + x \\ v = 2t + y \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(k ma wektor kierunkowy $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ i przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$).

Zatem $P_l\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ jest punktem przecięcia prostych l i k:

$$\begin{cases} x' = t + x \\ y' = 2t + y \\ x' + 2y' = 0 \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad t + x + 2(2t + y) = 0, \quad t = -\tfrac{1}{5}(x + 2y).$$

Mamy więc

$$x' = -\tfrac{1}{5}(x + 2y) + x = \tfrac{4}{5}x - \tfrac{2}{5}y$$

$$y' = -\tfrac{2}{5}(x + 2y) + y = -\tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{5}y,$$

inaczej $P_l\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y \\ -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\end{pmatrix} = X'$.

- Jeśli $S_l(X) = X''$, to $X'' = 2X' - X$, a więc z powyższego:

$$S_l(X) = S_l\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y \\ -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\end{pmatrix}. \quad (*)$$

a) Skoro $R_{90°}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$, więc

$$(S_l \circ R_{90°})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = S_l\left(R_{90°}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = S_l\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}(-y) - \frac{4}{5}x \\ -\frac{4}{5}(-y) - \frac{3}{5}x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \\ -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\end{pmatrix},$$

co odpowiada macierzy $\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & +\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

$$(R_{90°} \circ S_l)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = R_{90°}\left(S_l\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = R_{90°}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \\ \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\end{pmatrix},$$

co odpowiada macierzy $\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

b) Analogicznie jak wyżej otrzymujemy, że

- $P_k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y\\ \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y\end{pmatrix}$, co daje macierz $\begin{pmatrix}\frac{16}{25} & \frac{12}{25}\\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25}\end{pmatrix}$.

Patrząc na wzór (*) przekszt. S_l widzimy, że jego macierz jest postaci: $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$,

- a zatem macierzą złożenia $S_l \circ P_k$ jest iloczyn macierzy $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{16}{25} & \frac{12}{25}\\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\frac{100}{125} & -\frac{75}{125}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

Stąd odczytujemy wzór złożenia $S_l \circ P_k$:

$$(S_l \circ P_k)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\end{pmatrix}.$$

- Analogicznie, macierzą złożenia $P_k \circ S_l$ jest

$\begin{pmatrix}\frac{16}{25} & \frac{12}{25}\\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\frac{100}{125}\\ 0 & -\frac{75}{125}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\frac{4}{5}\\ 0 & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$, a stąd

$$(P_k \circ S_l)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}y\\ -\frac{3}{5}y\end{pmatrix}.$$

2. $(F\circ G)(X) = F\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};$

$(H\circ F)(X) = \begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}5 & 4\\ 10 & 3\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}.$

3\. a) $F(X) = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 1 \\ x \quad\quad + 1 \end{pmatrix} = G(T_u(X))$, gdzie $G(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$, $u = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Zatem $G(T_u(X)) = G\begin{pmatrix} x+e \\ y+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+e \\ y+f \end{pmatrix}$, a więc mamy wyznaczyć takie a, b, c, d oraz e, f, aby dla każdego x, y zachodziła równość:

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y + 1 \\ x \quad\quad + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + ae + bf \\ cx + dy + ce + df \end{pmatrix}.$$

Stąd otrzymujemy $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 0$ oraz
$\begin{cases} 2e + 3f = 1 \\ e = 1 \end{cases}$, czyli $e = 1$, $f = -\frac{1}{3}$.

Ostatecznie: $\underline{F(X)} = G(T_u(X)) = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$, czyli

$\underline{G(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X}$, $\underline{u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$.

b) Analogicznie, jak w podpunkcie a) dochodzimy do równania: $\begin{pmatrix} x - y + 2 \\ x - y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + ae + bf \\ cx + dy + ce + df \end{pmatrix}$,

skąd $a = c = 1$, $b = d = -1$ oraz $\begin{cases} e - f = 2 \\ e - f = -1 \end{cases}$,

co pokazuje, że F nie da się przedstawić jako takie złożenie.

5\. Przypomnijmy, że $S_A(X) = X'$ takie, że $\overrightarrow{AX'} = -\overrightarrow{AX}$,
czyli $X' - A = -(X - A)$, tzn. $X' = \underline{2A - X = S_A(X)}$.
Tak samo: $\underline{S_B(X) = 2B - X}$, a zatem

- $\underline{(S_A \circ S_B)(X)} = S_A(2B - X) = 2A - (2B - X) = X + 2\overrightarrow{BA} = \underline{T_{2\overrightarrow{BA}}(X)}$;
- $\underline{(S_B \circ S_A)(X)} = S_B(2A - X) = 2B - (2A - X) = X + 2\overrightarrow{AB} = \underline{T_{2\overrightarrow{AB}}(X)}$.

4. Przypomnijmy, że jednokładność D o środku $S = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i skali k określamy tak:

- $D(X) = X' : \overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$, tzw. $\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b. \end{matrix}$

Zatem $D_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$, bo $a = b = 0$, oraz

$$D_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lx + 1 - l \\ ly \end{pmatrix}, \text{ bo } a = 1,\ b = 0.$$

- Stąd $(D_1 \circ D_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(lx + 1 - l) \\ k(ly) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} klx + k(1-l) \\ kly \end{pmatrix}.$

- Jeśli dla $k \neq 1$ przyjmiemy $l = \frac{1}{k}$, to

$$(D_1 \circ D_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + k(1 - \frac{1}{k}) \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_{\begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

6. Korzystając z geometrycznej interpretacji obu przekształceń (odbić) mamy:

- $S_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$, co daje macierz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $S_l \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$, — " — $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Stąd

złożenie $S_y \circ S_l$ ma macierz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sim R_{-90^\circ}$;

— " — $S_l \circ S_y$ — " — $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim R_{90^\circ}$.

7. podane w Odpowiedziach w skrypcie

8. a) $G = R_{-\alpha}$. Wtedy macierzą złożenia $R_\alpha \circ R_{-\alpha}$ jest

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$ bo $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Tak samo $R_{-\alpha} \circ R_\alpha = id$;

b) $G = S_\ell$. Wtedy macierzą złożenia $S_\ell \circ S_\ell$ jest macierz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, bo $S_\ell(X) = X'$ takie, że $S_\ell(X') = X$, a więc $(S_\ell \circ S_\ell)(X) = S_\ell(S_\ell(X)) = S_\ell(X') = X$.

c) $G = T_{-v}$. Mamy wtedy dla dowolnego X

$(T_v \circ T_{-v})(X) = T_v(T_{-v}(X)) = T_v(X - v) = (X - v) + v = X$;

$(T_{-v} \circ T_v)(X) = (X + v) - v = X$.

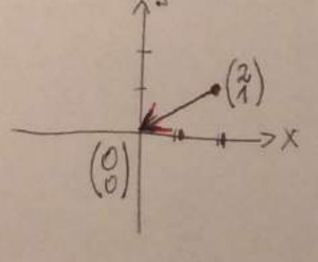
9. a) $T_{\binom{2}{1}} \circ J^2_{\binom{0}{0}} \circ T_{-\binom{2}{1}}$, gdzie $J^2_{\binom{0}{0}}$ - jednokładność o środku $\binom{0}{0}$ i skali 2;

b) $T_{\binom{0}{-1}} \circ S_\ell \circ T_{\binom{0}{1}}$, gdzie $\ell: x + y = 0$;

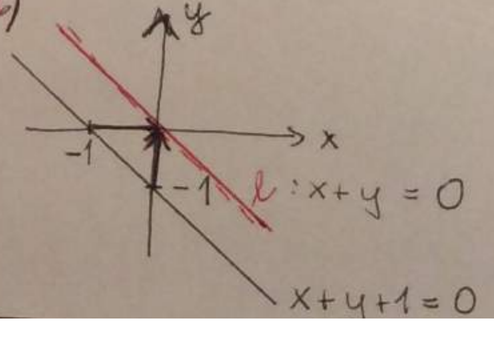
c) $T_{\binom{-1}{0}} \circ P_\ell \circ T_{\binom{1}{0}}$, — || — ; P - rzut na ℓ;

d) $T_{-\binom{0}{1}} \circ P^3_\ell \circ T_{\binom{0}{1}}$, gdzie P^3_ℓ - powinowactwo o osi $\ell: x + y = 0$ i skali 3.

a)



b)–d)



2.3. Składanie przekształceń ; zad. 12.

Niech k to prosta $y = ax$, a $l : y = bx$, $a \neq b$.

- Wyznaczamy wzór rzutu na prostą $k : ax - y = 0$.
$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$ to wektor normalny tej prostej, a więc rzut $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \bar{X}$ punktu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X$ spełnia warunki:
$$\begin{cases} \bar{x} - x = ta \\ \bar{y} - y = -t \\ a\bar{x} - \bar{y} = 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} \bar{x} = ta + x \\ \bar{y} = -t + y \\ a(x + at) - (y - t) = 0 \end{cases}$$

Stąd $t = \dfrac{y - ax}{1 + a^2}$, czyli $\bar{x} = \dfrac{x + ay}{1 + a^2}$, $\bar{y} = \dfrac{ax + a^2 y}{1 + a^2}$

- Wyznaczamy wzór odbicia (symetrii) względem prostej k:
$S_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = X'$ taki, że $X' = 2\bar{X} - X$.
Zatem $x' = \dfrac{2(x + ay)}{1 + a^2} - x = \dfrac{(1 - a^2)x + 2ay}{1 + a^2}$, $y' = \dfrac{2ax + (-1 + a^2)y}{1 + a^2}$.

- $m(S_k) = \dfrac{1}{1 + a^2} \begin{pmatrix} 1 - a^2 & 2a \\ 2a & -(1 - a^2) \end{pmatrix}$. Pamiętając, że $a = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem nachylenia prostej k do osi Ox, macierz $m(S_k)$ zapisujemy w postaci:
$$\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} & \dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} & -\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

- Wyznaczamy macierz złożenia symetrii $S_k \circ S_l$: $(b = \operatorname{tg}\beta)$
$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta & \sin 2\beta \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\beta \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix}.$$ Otrzymaliśmy macierz obrotu o kąt $2(\alpha - \beta)$

- Analogicznie, złożenie symetrii $S_l \circ S_k$ jest obrotem o kąt $2(\beta - \alpha)$.