Zadania 2.5 Odpowiedzi

1. Macierze przekształceń liniowych. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   a) $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, czyli $m(F) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$

   b) $F(X) = \frac{1}{2} det \begin{pmatrix} a_1 & x \\ a_2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5a_2 & 0.5a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, czyli $m(F) = \begin{pmatrix} -0.5a_2 & 0.5a_1 \end{pmatrix}$

   c) $m(F) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$

   d) $m(F) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

   e) $m(F) = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$

2. Obrazy punktu $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i punktu 2

   a) $F(A) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

   b) $F(A) = 0.5a_1 - 0.5a_2$

   c) $F(A) = v_1 + v_2$

   d) $F(2) = \begin{pmatrix} 2p \\ 2q \end{pmatrix}$

   e) $F(2) = 2a$

3. Przeciwobraz punktu 0. Tu trzeba wyznaczyć punkt X taki, że $F(X) = 0$. Gdzie 0 oznacza - w zależności od sytuacji - liczbę 0 lub punkt $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   a) prosta $y = -\frac{a}{b}x, b \neq 0$, chociaż lepiej zapisać odpowiedź w postaci ogólnej $ax + by = 0$ lub parametrycznej. Na przykład takiej $\{x = bt, y = -at\}$, gdzie parametr t jest dowolną liczbą rzeczywistą

   b) prosta $y = \frac{a_2}{a_1}x, a_1 \neq 0$, $-a_2x + a_1y = 0$, $\{x = a_1t, y = a_2t\}$

   c) prosta $y = -\frac{v_1}{v_2}x, v_2 \neq 0$, $v_1x + v_2y = 0$, $\{x = v_2t, y = -v_1t\}$

   d) jeżeli $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ nie jest punktem O=$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, to przeciwobrazem O jest O natomiast, jeżeli $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ jest punktem O, to przeciwobrazem O jest R

   e) jeżeli $a \neq 0$, to przeciwobrazem 0 jest 0, natomiast jeżeli $a = 0$, to przeciwobrazem jest R

4. Jeżeli $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ nie jest punktem O, to przeciwobrazem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest 0, natomiast jeżeli $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ jest punktem O, to przeciwobrazem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest R. Tu trzeba wyliczyć t z prostego układu równań $tp = 0, tq = 0$ w zależności od p i q

5. Obraz punktu $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ przez przekształcenia afiniczne

   a) z definicji symetrii środkowej mamy układ równań $\begin{pmatrix}x'-2\\y'-1\end{pmatrix}$ = - $\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$ Stąd szukanym obrazem jest punkt $\begin{pmatrix}-x+4\\-y+2\end{pmatrix}$ Podstawiając tu zadany punkt $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ w miejsce $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ otrzymujemy, że szukanym obrazem punktu $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ względem powyższej symetri środkowej jest punkt $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

   b) pierwsza współrzędna nie ulega zmianie natomiast druga zmienia znak. Stąd szukanym punktem jest $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

   c) w miejsce X wstawiamy zadany punkt i otrzymujemy $\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

   d) szukanym obrazem jest punkt $\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$

6. Przeciwobrazy punktów $A=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

   a) Trzeba wyznaczyć proste prostopadłe do prostej $x+y-2=0$ dla punktów A i B odpowiednio. Stąd przeciwobrazem punktu A są punkty leżące na prostej $y-x=0$ a punktu B są punkty na prostej $y-x+2=0$

   b) Ponieważ punkt A leży na prostej $y=x$, więc jego przeciwobrazem względem odbicia symetrycznego względem tej prostej jest on sam tzn. punkt A. Punkt B leży na osi x. Ponieważ oś x w wyniku tego przekształcenia przechodzi na oś y, więc przeciwobrazem punktu B będzie pewien punkt na osi y. Jaki? Należy wyznaczyć prostą prostopadłą do prostej $y=x$ i przechodzącą przez punkt B. Jest to prosta $y=-x+2$. Prosta ta przecina oś y w punkcie $y=2$. Stąd przeciwobrazem punktu B jest punkt $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

   c) Mamy wyznaczyć punkt X z równania $F(X)=A$. Z tego równania otrzymujemy jedno równanie $2x+2y=1$. Stąd przeciwobraz punktu A stanowią punkty na prostej o równaniu $2x+2y-1=0$. Dla punktu B postępujemy podobnie. Wtedy mamy wyznaczyć taki punkt X, który spełnia równanie $F(X)=B$. Otrzymujemy sprzeczny układ następujących równań $\{2x+2y=2, 2x+2y=0\}$ Stąd przeciwobrazem punktu B jest zbiór pusty.

   d) Tu postępujemy analogicznie, jak w podpunkcie poprzednim. Dla punktu A otrzymujemy układ równań, którego rozwiązaniem jest punkt $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

7. Sprawdzenie różnowartowości i 'na' przekształceń

   a) Jest rożnowartosciowa i 'na' , bo macierz obrotu ma wyznacznik równy 1, więc niezerowy.

   b) Nie jest różnowartościowe, bo dowolne dwa różne punkty na prostej prostopadłej do l przechodzą na jeden punkt na prostej l. Nie jest 'na', bo obrazem całej płaszczyzny jest tylko prosta l.

c) Przekształcenie to przeprowadza całą płaszczyznę w jeden punkt P, czyli nie może być ani różnowartościowe, ani 'na'.

d) Nie jest różnowartościowe, bo różne trójkąty o podstawie OA mogą mieć to samo pole. Wystarczy różne punkty X dobierać tak, aby odległości między tymi punktami , a ich rzutami na prostą OA były równe. Jest 'na', ponieważ macierz $m(F)$ jest niezerowa.

e) Jest różnowartościowe, bo $m(F) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ jest niezerowa. Przekształcenie z prostej w płaszczyznę nigdy nie jest 'na'.