Zadania 3.1 Odpowiedzi

1. Wartości i wektory własne z definicji.

   a) Dla przekształcenia zerowego rozwiązujemy równanie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Stąd $\lambda = 0$, a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jest dowolnym niezerowym wektorem z $\mathbb{R}^2$.

   b) Symetria środkowa jest takim przekształceniem F, że $F(X) = -X$.
   Zatem $m(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Rozwiązując równanie $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mamy $\lambda = -1$, natomiast $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jest dowolnym niezerowym wektorem z $\mathbb{R}^2$.

2. Wartości i wektory własne powinowactwa prostokątnego F o osi $l : ax + by = 0$ i skali k. Niech $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ będzie rzutem punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ na prostą l, a $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ niech oznacza obraz X przez F.

   a) Wyznaczamy $m(F)$:

   - W pierwszy kroku wyznaczamy rzut X_0 punktu X na oś l.
     Ponieważ wektor $\overrightarrow{XX_0}$ jest równoległy do wektora normalnego $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ prostej l, a X_0 leży na prostej l, więc musimy rozwiązać następujący układ równań:

     $$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ ax_0 + by_0 = 0 \end{cases}$$

     Otrzymujemy:

     $$x_0 = \frac{b^2x - aby}{a^2 + b^2}$$
     $$y_0 = \frac{-abx + a^2y}{a^2 + b^2}$$
     $$t = -\frac{ax + by}{a^2 + b^2}$$

   - Teraz wyznaczamy X' w zależności od X korzystając z defincji powinowactwa prostokątnego: $\overrightarrow{X_0X'} = k\overrightarrow{X_0X}$. Zapisując ten warunek w postaci

     $$\{x' = x_0 + k(x - x_0),\ y' = y_0 + (y - y_0)\}$$

     otrzymujemy

     $$m(F) = \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} ka^2 + b^2 & (k-1)ab \\ (k-1)ab & kb^2 + a^2 \end{pmatrix}$$

   b) Aby wyznaczyć wartości i wektory własne tego przekształcenia przejdziemy do jego interpretacji geometrycznej.

- Jeżeli X leży na osi l, to obrazem X jest on sam, dlatego $\lambda = 1$, a za X możemy przyjąć wektor kierunkowy prostej l tzn. wektor $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
  Jeżeli X leży na prostej przechodzącej przez O i prostopadłej do l,to obrazem X jest wektor kX. Dlatego w tym przypadku wartością własną będzie liczba k, a wektorem własnym $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Na koniec należy sprawdzić poprawność odgadniętych wyników przez podstawienie ich do równości:

$$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} ka^2+b^2 & (k-1)ab \\ (k-1)ab & kb^2+a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Ostatecznie otrzymujemy wartości własne 1 i k oraz odpowiednio wektory własne $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

3. Wartości własne izometrii liniowej F.
Jeżeli F jest izometrią, to spełniony jest następujący warunek: $|F(X)| = |X|$. Jeżeli X jest wektorem własnym z wartością własną λ, to $F(X) = \lambda X$. Mamy zatem następujący ciąg równości:

$$|X| = |F(X)| = |\lambda X| = |\lambda| \cdot |X|,$$

skąd $|\lambda| = 1$.
Dla $\lambda = 1$ izometria liniowa jest obrotem, a dla $\lambda = -1$ symetrią osiową względem prostej przechodzącej przez O.

4. F ma wartość własną 0, tzn. $F(X) = 0 \cdot X$ dla $X \neq 0$. Stąd np. $2F(X) = 0$. Korzystając z liniowości F mamy $F(2X) = 0$. W ten sposób orzymujemy dwa różne punkty (tzn. X i $2X$), które przechodzą na ten sam punkt O. Stąd F nie jest różnowartościowe.

5. Wielomian charakterystyczny macierzy $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ jest postaci $(a-\lambda)(b-\lambda)$.

   a) Przypadek $a \neq b$.
   Wartość własna $\lambda = a$.
   Wtedy wektory własny wyznaczamy z równania $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Stąd otrzymujemy układ równań $\{cy = 0, (b-a)y = 0\}$, który ma jedno rozwiązanie $y = 0$. Wtedy wektorem własnym jest $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   Wartość własna $\lambda = b$.
   Wtedy wektory własny wyznaczamy z równania $\begin{pmatrix} a-b & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Stąd otrzymujemy równanie $(a-b)x + cy = 0$, którego rozwiązanie jest zależne od c.
   Jeżeli $c \neq 0$, to $y = \frac{b-a}{c}x$, a x dowolne i wtedy wektor własny jest postaci: $t\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b-a}{c} \end{pmatrix}$.
   Jeżeli $c = 0$, to $x = 0$ i y dowolne i wtedy wektor własny jest postaci: $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Przypadek $a = b$.

Wtedy wektory własne wyznaczamy z równania $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Stąd otrzymujemy równanie $cy = 0$, którego rozwiązanie zależy od c.

Jeżeli $c \neq 0$, to $y = 0$. Ponieważ nie było ograniczeń na x, więc jest dowolną liczbą rzeczywistą i dlatego wektor własny w tym przypadku ma postać: $t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Jeżeli $c = 0$, to y jest dowolne oraz x też dowolne i dlatego w tym przypadku wektorem własnym jest dowolny wektor z $\mathbb{R}^2$.

6. Wielomian charakterystyczny macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ -p & 3 \end{pmatrix}$ jest postaci $\lambda^2 - 4\lambda + 3 + p^2$. Liczba wartości własnych macierzy A jest zależna od ilości rozwiązań powyższego trójmianu kwadratowego, którego wyróżnik ma postać $\Delta = 4(1 - p^2)$. Stąd ich liczba wynosi

$$\begin{cases} 0, |p| > 1 \\ 1, |p| = 1 \\ 2, |p| < 1 \end{cases} .$$

7. Łatwo sprawdzić, że wielomian charakterystyczny macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jest postaci $\lambda^2 - tr\, A\, \lambda + det\, A$, gdzie $tr\, A = a + d$ oraz $det\, A = ad - bc$
Stąd $tr\, A = 4$ i $det\, A = 5$. Przykładową macierzą spełniającą te warunki jest macierz $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Łatwo sprawdzić, że dla $n = 2$ jest spełniona równość $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$.
Korzystając z zasady indukcji matematycznej otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(n+1)} & 0 \\ 0 & b^{(n+1)} \end{pmatrix}.$$

9. Z zależności $F(u + v) = F(u - v)$, korzystając z liniowości F, otrzymujemy $F(u) + F(v) = F(u) - F(v)$. Stąd $F(v) = 0 = 0 \cdot v$.To oznacza, że v jest wektorem własnym F dla wartości własnej równej 0.

10. Niech λ i $X \neq 0$ oznaczają odpowiednio wartość własną i wektor własny macierzy A spełniającej warunek $A^2 = A$. Wtedy otrzymujemy następujący ciąg równości

$$\lambda X = AX = A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X.$$

Stąd $\lambda X = \lambda^2 X$. Rozwiązaniem tego równania jest para liczb 0 lub 1.

11. Niech λ i $X \neq 0$ oznaczają odpowiednio wartość własną i wektor własny przekształcenia F spełniającego warunek $F \circ F = F$. Wtedy

$$\lambda X = F(X) = (F \circ F)(X) = F(F(X)) = F(\lambda X) = \lambda F(X) = \lambda^2 X.$$

Stąd $\lambda X = \lambda^2 X$. Rozwiązaniem tego równania są liczby równe 0 lub 1.
Przykłady takich przekształceń to: rzut na prostą, przekształcenie stałe, identyczność.

12. Mamy następujący ciąg równości:

$$A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v.$$

Stąd $A^2 v = \lambda^2 v$, a ta równość oznacza, że v jest również wektorem własnym macierzy A^2 dla wartości własnej λ^2.

13. Mamy następujący ciąg równości:

$$F^2 v = F(Fv) = F(\lambda v) = \lambda Fv = \lambda^2 v.$$

Stąd $F^2 v = \lambda^2 v$, a ta równość oznacza, że v jest również wektorem własnym przekształcenia F^2 dla wartości własnej λ^2.