Przydatne zależności:

$$[v]_s = P[v]_n \tag{1a}$$
$$[v]_n = P^{-1}[v]_s, \tag{1b}$$

gdzie

$$P = ([e'_1]_s, [e'_2]_s), \quad n = nowy, s = stary,$$

e'_1, e'_2, wersory nowego układu współrzędnych wyrażone w starych współrzędnych

1. Korzystając z (1a) dla $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mamy $[v]_s = \binom{7}{9}$, $[w]_s = \binom{13}{1}$.

2. Dla $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ mamy $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Stąd, korzystając z (1b) dostajemy $[w]_n = \binom{2}{5}$.

3. Korzystając z (1b) mamy $[e_i]_n = P^{-1}[e_i]_s$, $i = 1, 2$ dla $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Stąd
$$[e_1]_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [e_2]_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Korzystając z (1a) mamy następujący układ równań:
$$\begin{cases} \binom{2}{1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \binom{1}{1} \\ \binom{5}{3} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \binom{-1}{1} \end{cases}$$
Stąd
$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$
czyli
$$e'_1 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ e'_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5. Jeżeli wersory mają być prostopadłe, to macierz P może być na przykład postaci $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ lub $P = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Mamy zatem do rozwiązania układ równań:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
lub
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązaniem pierwszego układu równań jest $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, drugiego natomiast $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Wersorami nowych układów współrzędnych są odpowiednio kolumny powyższych macierzy.

6. Z układu równań $e_1' = 3e_1 - 2e_2,\ e_2' = e_1 + 3e_2$ wyznaczamy

$$\{e_1 = \frac{3}{11}e_1' + \frac{2}{11}e_2',\ \ e_2 = -\frac{1}{11}e_1' + \frac{3}{11}e_2'\}.$$

Stąd

$$[v]_s = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 = (\frac{3}{11}x - \frac{1}{11}y)e_1' + (\frac{2}{11}x + \frac{3}{11}y)e_2'.$$

Innymi słowy $[v]_n = \binom{\frac{3}{11}x - \frac{1}{11}y}{\frac{2}{11}x + \frac{3}{11}y}$.

7. Mamy $e_1 = e_1' + 3e_2',\ e_2 = e_1' + e_2'$. Stąd

$$[v]_s = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 = (x+y)e_1' + (3x+y)e_2'.$$

Innymi słowy $[v]_n = \binom{x+y}{3x+y}$.

8. Korzystamy z wzoru (1a), aby wyznaczyć $[X]_s = \binom{x}{y}$ z $[X]_n = \binom{x'}{y'}$, gdzie $P = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Stąd

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x' + 2y'\\ x' + y'\end{pmatrix}.$$

Podstawiając do równań podanych prostych otrzymujemy kolejno:

a)

$$3x + 2y = 3(x' + 2y') + 2(x' + y') = 5x' + 8y'$$

Innymi słowy, prosta o równaniu $3x + 2y = 0$ w nowym układzie współrzędnych ma równanie $5x' + 8y' = 0$.

b) Postępujemy jak wyżej i otrzymujamy równanie w nowym układzie wspórzędnych w postaci: $-3x' - y' + 1 = 0$.

c) Z poniższego układu równań wyznaczamy x' i y'.

$$\{x' + 2y' = 2t + 1,\ \ x' + y' = 3t + 1\}$$

i otrzymujemy

$$\{x' = 4t + 1, ,\ \ y' = -t\}$$

Innymi słowy, w nowym układzie współrzędnych prosta ma równanie $\binom{x'}{y'} = t\binom{4}{-1} + \binom{1}{0}$ albo w postaci ogólnej $x' + 4y' - 1 = 0$.

9. W tym zadaniu musimy wyrazić $[X]_n = \binom{x'}{y'}$ przy pomocy $[X]_s = \binom{x}{y}$. W tym celu należy skorzystać z (1b), gdzie

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Stąd, otrzymujemy

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}y - x\\ x + y\end{pmatrix}.$$

Dlatego

a) mamy $2x' - 5y' = y - x - \frac{5}{2}(x+y) = -\frac{7}{2}x - \frac{3}{2}y$, czyli w starym układzie współrzędnych równanie prostej ma postać: $-\frac{7}{2}x - \frac{3}{2}y = 0$;

b) postępując jak wyżej, otrzymujemy $y + 1 = 0$;

c) tu natomiast mamy $5x + 2y - 1 = 0$.

10. Wersorami nowego układu współrzędnych są wektory własne przekształcenia F.

11. Mamy następującą zależność: $[Y]_i = m_i(F)[X]_i$ dla $i = s, n$.

    Ze wzoru (1a) wyznaczymy $[X]_s$ i $[Y]_s$, odpowiednio, w zależności od $[X]_n$ i $[Y]_n$, co prowadz ido ciągu zależności:

$$P \cdot [Y]_n = [Y]_s = m_s(F) \cdot [X]_s = m_s(F) \cdot P \cdot [X]_n,$$

czyli

$$P \cdot [Y]_n = m_s(F) \cdot P \cdot [X]_n.$$

Stąd $[Y]_n = (P^{-1} \cdot m_s(F) \cdot P) \cdot [X]_n$. Innymi słowy,

$$\begin{aligned} m_n(F) &= P^{-1} \cdot m_s(F) \cdot P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 19 & -7 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

12. Mamy następującą zależność: $[Y]_i = m_i(F)[X]_i$ dla $i = s, n$.

    Ze wzoru (1b) wyznaczamy $[X]_n$ i $[Y]_n$, odpowiednio, w zależności od $[X]_s$ i $[Y]_s$, skąd otrzymujemy następujący ciąg zależności:

$$P^{-1} \cdot [Y]_s = [Y]_n = m_n(F) \cdot [X]_n = m_n(F) \cdot P^{-1} \cdot [X]_s,$$

czyli

$$P^{-1} \cdot [Y]_s = m_n(F) \cdot P^{-1} \cdot [X]_s.$$

Stąd $[Y]_s = (P \cdot m_n(F) \cdot P^{-1}) \cdot [X]_s$. Innymi słowy,

$$\begin{aligned} m_s(F) &= P \cdot m_n(F) \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$