Zadania 5.1 Odpowiedzi

1. Przyjmiemy $z_n = x_n + iy_n$, dla $n = 1, 2$. Wtedy mamy

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2) \text{ oraz } iz_1 = i(x_1 + iy_1) = -y_1 + ix_1,$$

czyli

$$Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2),\ Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$$

oraz

$$Re(iz_1) = -Im(z_1),\ Im(iz_1) = Re(z_1).$$

2. Policzymy $(1-i\sqrt{3})^{50}$. Liczbę $z = (1-i\sqrt{3})$ przedstawimy w postaci trygonometrycznej. W tym celu musimy wyznaczyć moduł i argument tej liczby. $|z| = 2$, a argument wyznaczamy z układu równań $\{cos\phi = \frac{1}{2},\ sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Ponieważ cos jest dodatni, a sin ujemny, wiec kąt ϕ należy do przedziału $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ i wynosi $\phi = \frac{5}{3}\pi$. Stąd

$$\begin{aligned} z^{50} =& [2(cos\frac{5}{3}\pi\ +\ isin\frac{5}{3}\pi)]^{50} = 2^{50}(cos\frac{250}{3}\pi + isin\frac{250}{3}\pi) \\ =& 2^{50}(cos[(41 + \frac{2}{3}) \cdot 2\pi]\ +\ isin[(41 + \frac{2}{3}) \cdot 2\pi]) = 2^{50}(cos\frac{4}{3}\pi\ +\ isin\frac{4}{3}\pi) \\ =& 2^{50}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -2^{49}(1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

3. Obliczymy pierwiastki 3. stopnia z liczby $z = -1 + i$. Ponownie wyznaczamy moduł i argument tej liczby. $|z| = \sqrt{2}$, a argument ϕ wyznaczamy z układu równań $\{cos\phi = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ sin\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}\}$. Stąd $\phi = \frac{3}{4}\pi$.Liczba z ma dokładnie trzy pierwiastki stopnia trzeciego i są to liczby postaci $w_k = \sqrt[3]{|z|}e^{i(\frac{\phi}{3}+\frac{2\pi}{3}k)},\ k = 0, 1, 2$, czyli

$$w_k = \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}k)},\ k = 0, 1, 2.$$

Przechodząc do postaci algebraicznej otrzymujemy kolejno

$$w_0 = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}(1 + i),$$

$$\begin{aligned} w_1 =& \sqrt[6]{2}(cos\frac{11}{12}\pi + isin\frac{11}{12}\pi) = \sqrt[6]{2}(cos[\pi - \frac{\pi}{12}] + isin[\pi - \frac{\pi}{12}]) \\ =& \sqrt[6]{2}(-cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}cos\frac{\pi}{12}(-1 + i \cdot tg\frac{\pi}{12}) \\ =& \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot (-1 + i(2 - \sqrt{3})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 =& \sqrt[6]{2}(cos\frac{19}{12}\pi + isin\frac{19}{12}\pi) = \sqrt[6]{2}(cos[2\pi - \frac{5\pi}{12}] + isin[2\pi - \frac{5\pi}{12}]) \\ =& \sqrt[6]{2}(cos\frac{5\pi}{12} - isin\frac{5\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}(cos[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}] - isin[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}]) \\ =& \sqrt[6]{2}(sin\frac{\pi}{12} - icos\frac{\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}cos\frac{\pi}{12}(tg\frac{\pi}{12} - i) \\ =& \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot (2 - \sqrt{3} - i) \end{aligned}$$

gdzie

$$cos\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\phi}{2}},\ sin\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\phi}{2}},\ tg\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\phi}{1+cos\phi}}.$$

Te zależności z kolei wynikają z następującego ciągu równości:

$$\begin{aligned} cos\phi =& cos^2\frac{\phi}{2} - sin^2\frac{\phi}{2} = 1 - 2sin^2\frac{\phi}{2} \\ =& 2cos^2\frac{\phi}{2} - 1 \end{aligned}$$

W powyższych wzorach należy przyjąć $\phi = \frac{\pi}{6}$, dlatego też pierwiastki są brane tylko ze znakiem plus. Sprawdźmy jeszcze, że $w_0 + w_1 + w_2 = 0$. (Patrz zadanie 11.)

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 =& \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}(1-\sqrt{3}) \cdot (1+i) \\ =& -\frac{\sqrt[6]{2}}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^2} \cdot (1+i) \\ =& -\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}} \cdot (1+i) \end{aligned}$$

Przy drugim znaku równości przed pierwiatkiem jest znak minus, bo $(1-\sqrt{3}) < 0$.

4. Wyznaczymy wszystkie pierwiastki zespolone stopnia szóstego z 1. Moduł tej liczby to 1, argument to 0, dlatego też pierwiastki te są postaci:

$$w_k = e^{i\frac{2\pi}{6}k} = e^{i\frac{\pi}{3}k},\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Równoważnie

$$\begin{aligned} w_0 =& 1, \\ w_1 =& \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ w_2 =& cos\frac{2}{3}\pi + isin\frac{2}{3}\pi = cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + isin(\pi - \frac{\pi}{3}) = -cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3}) \\ =& -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ w_3 =& -1, \\ w_4 =& cos\frac{4}{3}\pi + isin\frac{4}{3}\pi = cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + isin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -cos(\frac{\pi}{3}) - isin(\frac{\pi}{3}) \\ =& -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ w_5 =& cos\frac{5}{3}\pi + isin\frac{5}{3}\pi = cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + isin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = cos(\frac{\pi}{3}) - isin(\frac{\pi}{3}) \\ =& \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

Zauważmy, że suma pierwiastków zespolonych z 1 wynosi zero.

5. Geometryczna interpretacja przekształcenia F

a) $F(x+iy) = ix - y$, to znaczy $F(\binom{x}{y}) = \binom{-y}{x}$. Stąd $m(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Jest to macierz obrotu o kąt $\frac{\pi}{2}$;

b) $F(x+iy) = -x - iy$, to znaczy $F(\binom{x}{y}) = \binom{-x}{-y}$. Stąd $m(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Jest to macierz symetrii środkowej o środku w O;

c) $F(x+iy) = (x+1) + i(y+1)$, to znaczy

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tym razem chodzi o translację o wektor $\binom{1}{1}$.

6. Mamy następujący ciąg równości dla $z = x + iy$:

$$|tz| = \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = |t|\sqrt{x^2 + y^2} = |t| \cdot |z|.$$

7. Z jednej strony mamy

$$(cos\phi + isin\phi)^2 = cos^2\phi - sin^2\phi + i(2sin\phi cos\phi).$$

Z drugiej natomiast, stosując wzór de Moivre'a, otrzymujemy

$$(cos\phi + isin\phi)^2 = cos2\phi + isin2\phi.$$

Po porównaniu części rzeczywistych i urojonych tych liczb otrzymujemy:

$$\begin{aligned} sin2\phi =& 2sin\phi cos\phi, \\ cos2\phi =& cos^2\phi - sin^2\phi. \end{aligned}$$

8. Aby wyznaczyć $sin3\phi$ i $sin3\phi$, należy postąpić analogicznie jak w zadaniu poprzednim.Tu jednak należy liczbę $cos\phi + isin\phi$ podnieść do potęgi trzeciej.

$$(cos\phi + isin\phi)^3 = (cos^3\phi - 3cos\phi sin^2\phi) + i(3cos^2\phi sin\phi - sin^3\phi)$$

oraz

$$(cos\phi + isin\phi)^3 = cos3\phi + isin3\phi.$$

Po porównaniu części rzeczywistych i urojonych tych liczb, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} sin3\phi =& 3cos^2\phi sin\phi - sin^3\phi, \\ cos3\phi =& cos^3\phi - 3cos\phi sin^2\phi. \end{aligned}$$

9. Pierwiastki stopnia n z 1 są postaci: $z_k = e^{i\frac{2\pi}{n}k}$. Jeżeli przyjmiemy $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, to otrzymamy$z_k = w^k$.

10. Mamy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} w^k =& \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = \frac{1 - (e^{i\frac{2\pi}{n}})^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\ =& \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1 - (cos2\pi + isin2\pi)}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\ =& 0. \end{aligned}$$