Zadania 6.1 Odpowiedzi

1. Szukany punkt musi spełniać następującą równość: $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, czyli $P - A = 2(B - P)$. Stąd otrzymujemy:
$$P = \frac{1}{3}(2B + A) = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{2}{3}x_1 \\ y_0 + \frac{2}{3}y_1 \\ z_0 + \frac{2}{3}z_1 \end{pmatrix}.$$

2. Niech P_1 i P_2 będą środkami odpowiednio krawędzi AB i CD, natomiast Q_1 i Q_2 środkami krawędzi AC i BD. Środek S_1 odcinka P_1P_2 jest zatem postaci:
$$S_1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}[(\frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(C + D)] = \frac{1}{4}(A + B + C + D),$$
a środek S_2 odcinka Q_1Q_2 wyraża się następująco:
$$S_2 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) = \frac{1}{2}[(\frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(B + D)] = \frac{1}{4}(A + B + C + D).$$
Stąd $S_1 = S_2$. Inaczej mówiąc, te dwa środki pokrywają się.

3. Środek S sfery ma następujące współrzędne:
$$S = \frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$
a promień ma długość $\frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{14}$. Stąd równanie sfery ma jest postaci:
$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 14.$$

4. Korzystając z następującego oszacowania:
$$||u| - |v|| \leq |u + v| \leq |u| + |v|,$$
mamy $4 \leq |u + v| \leq 10$.

5. Mamy trzy niewspółliniowe punkty
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Zatem płaszczyzna jest rozpięta na przykład na parze wektorów
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ i } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Biorąc pod uwagę na przykład punkt A mamy jej równanie parametryczne postaci
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Traktując je jako następujący układ równań: $\{x = 1+t,\ y = 1-t-s,\ z = 1+2t+3s\}$, wyrugujemy z niego s i t. Doprowadzi to do równania ogólnego tej płaszczyzny postaci $x + 3y + z - 5 = 0$.
Inny sposób wyznaczenia równania ogólnego tej płaszczyzny polega na wyznaczeniu jej wektora normalnego, czyli iloczynu wektorowego na przykład wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.
Zatem $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, czyli równanie ogólne płaszczyzny, która przechodzi przez punkt A i ma wektor normalny $\overrightarrow{n}$ jest następującej postać: $(x-1) + 3(y-1) + (z-1) = 0$.

6. Wystarczy znaleźć dwa różne rozwiązania następującego układu równań:

$$\{2x + y - z - 4 = 0,\ 3x + 3y - 2z - 9 = 0\}.$$

Można sprawdzić, że takimi rozwiązaniami są na przykład współrzędne następujących punktów:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Wtedy za wektor kierunkowy szukanej prostej przyjmujemy np. wektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Stąd jej równanie ma następującą postać parametryczną:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

lub kierunkową

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3},$$

co można zapisać również jako

$$x = y - 1 = \frac{z+3}{3}.$$

7. W pierwszej kolejności znajdziemy równania tych płaszczyzn w postaci ogólnej.
W tym celu rozwiążemy następujące układy równań:

$$\{x = 1 + 2s;\ y = 1 + s + 2t,\ z = 1 + s\},$$

$$\{x = -1 + s - t,\ y = 2 + 4s + 5t,\ z = -2s - 3t\}.$$

Otrzymujemy kolejno $x - 2z + 1 = 0$ oraz $-2x + 5y + 9z - 12 = 0$.
Postać krawędziową prostej stanowi następujący układ równań:

$$\{-2x + 5y + 9z - 12 = 0,\ x - 2z + 1 = 0\}.$$

Aby wyznaczyć postać parametryczną tej prostej, musimy mieć punkt, przez który przechodzi oraz jej wektor kierunkowy. W tym celu wskażemy dwa różne rozwiązania powyższego układu równań. Są nimi na przykład punkty

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Za wektor kierunkowy tej prostej weźmiemy wektor równoległy do wektora $\overrightarrow{AB} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, co ostatecznie daje następującą postać parametryczną tej prostej:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

W postaci kierunkowej zapisujemy ją jako

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

lub równoważnie

$$\frac{x+1}{2} = 2 - y = z.$$

Inny sposób rozwiązania tego zadania polega w pierwszej kolejności na wyznaczeniu wektorów normalnych do podanych płaszczyzn. Odpowiednio dla pierwszej i drugiej płaszczyzny są nimi następujące wektory:

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ i } \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Za wektor kierunkowy szukanej prostej przyjmiemy wektor równoległy do iloczynu wektorowego wektorów normalnych tych płaszczyzn:

$$n_1 \times n_2 = -10\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. Postać parametryczna tej prostej to

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

natomiast kierunkowa

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Równoważnie można ją zapisać następująco:

$$\frac{x-3}{2} = 2 - y = 1 - z$$

lub na przykład w poniższej postaci

$$\frac{x-3}{-2} = y - 2 = z - 1.$$

9. Należy znaleźć rozwiązania odpowiednich układów równań.

a)

$$\begin{cases} 2x+3y+z-5= & 0 \\ \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{5}= & t. \end{cases}$$

Równoważnie

$$\begin{cases} 2x+3y+z-5= & 0 \\ x= & 2t+3 \\ y= & 3t+4 \\ z= & 5t+6. \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest $t=-\frac{19}{18}$ i następujące x,y i z: $\begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{23}{18} \end{pmatrix}$.

b)

$$\begin{cases} x+y+z-2= & 0 \\ x= & t \\ y= & t-1 \\ z= & -t+1. \end{cases}$$

Tu rozwiązaniem jest $t=2$ oraz $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Z równania kierunkowego prostej otrzymujemy następujące zależności: $\{y=2x-1,\ z=3x-2\}$, które wstawiamy do równania parametrycznego płaszczyzny i otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} -x & + & s & + & 2t & + & 1 & = & 0 \\ -2x & - & s & & & + & 2 & = & 0 \\ -3x & + & 2s & + & 3t & + & 3 & = & 0. \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest $t=-1,\ s=4$ i następujące x,y i z: $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Inny sposób polegałby na zapisaniu równania płaszczyzny w postaci ogólnej. Wtedy zadanie to sprowadza się do zadania z punktu a).

d) Postępuje się podobnie jak w punkcie c).

10. Z równania pierwszej prostej otrzymujemy następujące zależności: $\{x=z=1+y\}$. Wstawiając je do równania drugiej prostej otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} y= & t+1 \\ y= & 3 \\ y= & 2t-1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $t=2,\ y=3$, a stąd $x=z=4$. Ponieważ nasz układ ma jedno rozwiązanie, to proste przecinają się w jednym punkcie: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.