1. $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

   Zatem objętość czworościanu ABCD wynosi

   $$\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{3},$$

   a pole ściany ABC jest równe $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Zmiana wyznacznika macierzy A rozmiaru 3 × 3

   a) Nie zmieni się.
   b) Ponieważ$|A^T| = |A|$, zadanie to sprowadza się do punktu a).
   c) Wyznacznik takiej macierzy jest równy $t^3|A|$.
   d) Wynika z punktu c). Wyznacznik takiej macierzy jest równy $-|A|$.

3. Wyznaczniki macierzy

   a) Należy dokonać rozwinięcia Laplace'a względem trzeciej kolumny, bo tam są aż dwa zera i wtedy otrzymujemy

   $$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\4 & 1 & 5\\3 & 2 & 0\end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{vmatrix} = -5 \cdot (-4) = 20.$$

   b) Wyznacznik tej macierzy zapisanej w postaci $(k_1k_2k_3)$ równa się zero, bo $k_1 = k_3$. Z definicji wyznacznika mamy

   $$|k_1k_2k_3| = (k_1 \times k_2) \circ k_3, \text{ a więc dla } k_1 = k_3 \text{ zachodzi } (k_1 \times k_2) \circ k_1 = 0,$$

   bo $(k_1 \times k_2)$ jest prostopadły do k_1. Ogólnie, jeżeli jakakolwiek kolumna jest równa innej kolumnie przemnożonej przez stałą, to jej wyznacznik wynosi zero. Ponieważ wyznacznik macierzy transponowanej jest równy macierzy wyjściowej, to własność ta przenosi się również na wiersze, bo po transpozycji wiersze stają się kolumnam, a kolumny wierszami. Proszę zauważyć, że w tym przykładzie wiersz trzeci równa się podwojonemu wierszowi pierwszemu ($w_3 = 2w_1$).

   c) Wyznacznik wynosi 12. Trzeba dokonać rozwinięcia Laplace'a względem pierwszego wiersza bądź trzeciej kolumny. Dokonujemy takiego wyboru ze względu na zero w pierwszym wierszu bądź trzeciej kolumnie. Można trochę uprościć obliczenia stosując własność wyznacznika przedstawioną w zadaniu 10. Wystarczy do trzeciego wiersza dodać drugi przemnożony przez (-7) (symbolicznie $w_3 \leftarrow w_3 - 7w_2$). Wtedy otrzymujemy, że wyznacznik naszej macierzy jest równy wyznacznikowi następującej macierzy: $\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\1 & 1 & 1\\-3 & -6 & 0\end{pmatrix}$. Tu jeszcze warto wyciągnąć (-3) z trzeciego wiersza przed znak wyznacznika i dokonać rozwinięcia Laplace'a, już zdecydowanie, względem trzeciej kolumny (dwa zera w tej kolumnie).

d) Wyznacznik wynosi 2. Wystarczy dokonać rozwinięcia Laplace'a względem dowolnego wiersza czy kolumny. Można też uprościć liczenie tego wyznacznika korzystając z własności wyznacznika podanych w zadaniu 9 i 10.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 9\end{vmatrix} \overset{w_2\leftarrow w_2-w_1}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3\\1 & 3 & 9\end{vmatrix} \overset{w_3\leftarrow w_3-w_1}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3\\0 & 2 & 8\end{vmatrix} \quad \text{rozwinięcie względem 1. kolumny daje}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 8\end{vmatrix} \overset{w_2\leftarrow w_2-2w_1}{=} \begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{vmatrix} = 2.$$

4. Wyznacznik wynosi $a \cdot b \cdot c$.

5. Należy sprawdzić, że te trzy wektory są liniowo niezależne. W tym celu wystarczy policzyć następujący wyznacznik:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix} \overset{w_1\leftarrow w_1-w_3}{=} \begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} = -2.$$

Aby przedstawić zadany wektor w postaci liniowej kombinacji powyższych trzech wektorów, należy rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{pmatrix}7\\1\\-1\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, które można wyznaczyć np. metodą Cramera. Jest nim trójka liczb $(x, y, z) = (2, -3, 4)$.

6. Schemat Sarrusa:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & - & - & - \\
 & & & & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
| & v_1 & w_1 & u_1 & v_1 & w_1 & | & \\
| & v_2 & w_2 & u_2 & v_2 & w_2 & | & \\
| & v_3 & w_3 & u_3 & v_3 & w_3 & | & \\
 & & & & \searrow & \searrow & \searrow & \\
 & & & & & + & + & +
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 + u_1v_2w_3\\
&- v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1 - u_3v_2w_1
\end{aligned}$$

po odpowiednim uporządkowaniu mamy:

$$\begin{aligned}
&= (v_2w_3 - v_3w_2)u_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)u_2\\
&+ (v_1w_2 - v_2w_1)u_3\\
&= (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u}.
\end{aligned}$$

7. Aby podane wektory były liniowo niezależne, poniższy układ musi mieć dokładnie jedno zerowe rozwiązanie:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\p+1\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}p\\p-2\\1\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Taka sytuacja ma miejsce, gdy wyznacznik macierzy głównej równy $-(4p^2 - 9)$ jest różny od zera. Stąd wektory te są liniowo niezależne dla $p \neq \pm\frac{3}{2}$.

8. Postępuje się jak w zadaniu 5.

9. Posłużymy się przedstawieniem wyznacznika jako iloczynu mieszanego wektorów. Mamy

$$\left|\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w} \quad \overrightarrow{u}\right| = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u}.$$

Policzmy

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{v} + t\overrightarrow{w} \quad \overrightarrow{w} \quad \overrightarrow{u}\right| &= ([\overrightarrow{v} + t\overrightarrow{w}] \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u} + t(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u} \\ &\overset{(1)}{=} (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u} = \left|\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w} \quad \overrightarrow{u}\right|,\end{aligned}$$

(1) bo $\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
Analogicznie postępuje się w przypadku wyznacznika $\left|\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w} + t\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{u}\right|$.
Ponadto

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w} \quad \overrightarrow{u} + t\overrightarrow{w}\right| &= (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ [\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u} + t(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{w} \\ &\overset{(1)}{=} (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u} = \left|\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w} \quad \overrightarrow{u}\right|,\end{aligned}$$

(1) bo $(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$ jest prostopadły do $\overrightarrow{w}$.
Podobnie postępuje się w przypadku wyznacznika $\left|\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w} \quad \overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}\right|$.

Stosując powyższe oraz korzystając z następującej zależności $|A| = |A^T|$, obliczamy wyznacznik

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} \overset{T}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} &\overset{k_1 \leftarrow k_1 - k_3}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} \\ &\overset{k_2 \leftarrow k_2 - k_3}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = -2.\end{aligned}$$

10. Na mocy własności $|A| = |A^T|$ zadanie to sprowadza się do zadania 9.