1. (b) Prosta prostopadła do zadanej płaszczyzny i przechodząca przez punkt X jest zbiorem punktów postaci
$$t\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$
Punkt X' przecięcia tej prostej z zadaną płaszczyzną ma następujące współrzędne:
$$x'=\frac{1}{29}(13x+12y-8z);\ y'=\frac{1}{29}(12x+20y+6z);\ z'=\frac{1}{29}(-8x+6y+25z).$$
Stąd szukana macierz ma postać:
$$\frac{1}{29}\begin{pmatrix}13&12&-8\\12&20&6\\-8&6&25\end{pmatrix}.$$
a) Bazując na b) szukamy takiego punktu X'', który spełnia warunek
$$\frac{X+X''}{2}=X' \quad \text{czyli} \quad X''=2X'-X.$$
Stąd
$$x''=\frac{1}{29}(-3x+24y-16z);\ y''=\frac{1}{29}(24x+11y+12z);\ z''=\frac{1}{29}(-16x+12y+21z).$$
Szukana macierz ma postać:
$$\frac{1}{29}\begin{pmatrix}-3&24&-16\\24&11&12\\-16&12&21\end{pmatrix}.$$
d) Rzut X' punktu X na zadaną prostą jest dla pewnego t postaci $X'=\begin{pmatrix}3t+1\\2t-2\\2t\end{pmatrix}$.
Ponieważ $\overrightarrow{XX'}$ jest prostopadły do zadanej prostej, więc zachodzi następujący warunek:
$$\begin{pmatrix}3t+1-x\\2t-2-y\\2t-z\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}=0,$$
z którego wyznaczamy $t=\frac{1}{17}(3x+2y+2z+1)$. Wtedy
$$X'=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}9x+6y+6z+20\\6x+4y+4z-32\\6x+2y+2z+2\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}9&6&6\\6&4&4\\6&2&2\end{pmatrix}\cdot X+\frac{2}{17}\begin{pmatrix}10\\-16\\1\end{pmatrix}.$$
c) Bazując na d) szukamy takiego punktu X'', że
$$\frac{X+X''}{2}=X', \quad \text{czyli} \quad X''=2X'-X.$$
Stąd
$$X''=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}1&6&6\\6&-9&4\\6&2&-13\end{pmatrix}\cdot X+\frac{4}{17}\begin{pmatrix}10\\-16\\1\end{pmatrix}.$$

2. $F(X) = AX + v$

a)

$$F(X) = I \cdot X + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c)

$$F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d)

$$F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

e)

$$F(X) = 3I \cdot X - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

f) Rzut R punktu X na płaszczyznę $y = 3$ jest postaci $(x\,3\,z)^T$, a szukany punkt X' spełnia zależność:

$$\overrightarrow{RX'} = 4\overrightarrow{RX}, \text{ czyli } X' - R = 4(X - R) \text{ albo } X' = 4X - 3R.$$

Stąd

$$X' = \begin{pmatrix} x \\ 4y - 9 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + 9 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

g) Odległość znakowana punktu X od płaszczyzny $x = 2$ wynosi $d(X) = x - 2$. Szukamy więc takiego punktu X', że

$$\overrightarrow{XX'} = d(X) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ czyli } X' = X + (x - 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$X' = \begin{pmatrix} x \\ y + x - 2 \\ z + x - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. $F(X) = AX + v$

a) R jest rzutem punktu X na płaszczyznę π. Równanie parametryczne prostej prostopadłej do π i przechodzącej przez punkt $x = (x\,y\,z)^T$ ma następującą postać: $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Stąd $R = \begin{pmatrix} 2t+x \\ -t+y \\ 2t+z \end{pmatrix}$ dla pewnego t. Ponieważ R leży również na płaszczyźnie π, więc współrzędne punktu R wstawiamy do równania tej płaszczyzny i wyznaczamy $t = \frac{1}{9}(-2x + y - 2z - 1)$. Zatem

$$R = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5x+2y-4z-2 \\ 2x+8y+2z+1 \\ -4x+2y+5z-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5x+2y-4z \\ 2x+8y+2z \\ -4x+2y+5z \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) W oparciu o podpunkt a) szukamy takiego X', że

$$\frac{X'+X}{2} = R, \text{ czyli } X' = 2R - X.$$

Stąd

$$X' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

c) Korzystając z a) mamy

$$\overrightarrow{RX'} = -2\overrightarrow{RX}, \text{ czyli } X' = 3R - 2X.$$

Stąd

$$X' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. (a) R oznacza rzut punktu X na prostą l. Wtedy $\overrightarrow{XR} = \begin{pmatrix} t+1-x \\ t-y \\ t+1-z \end{pmatrix}$ jest prostopadły do wektora $(1\,1\,1)^T$, czyli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Z tego warunku otrzymujemy $t = \frac{1}{3}(x + y + z - 2)$. Ostatecznie

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+y+z+1 \\ x+y+z-2 \\ x+y+z+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Korzystając z a) mamy

$$X' = 2R - X = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 1 \\ 1 & -0.5 & 1 \\ 1 & 1 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot X + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Ponownie stosując a) otrzymujemy

$$X' = 3R - X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. $\pi : x+y+z+1=0,\ \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$

   Prosta przechodząca przez punkt $X = (x\,y\,z)^T$ i równoległa do wektora $\overrightarrow{a}$ ma równanie parametryczne postaci: $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, czyli rzut R punktu X na π można przedstawić jako $R = \begin{pmatrix}t+x\\y\\2t+z\end{pmatrix}$ dla pewnego t. Ponieważ R leży na płaszczyźnie π, więc wstawiając jego współrzędne do równania płaszczyzny π otrzymamy, że $t = -\frac{1}{3}(x+y+z+1)$. Stąd

$$X' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-y-z-1x\\3y\\-2x-2y+z-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\0 & 3 & 0\\-2 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

6. $\pi : 2x-y+2z-1=0,\ \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$

   Powinowactwo ścinające jest określone następująco:

$$\overrightarrow{XX'} = d(X)\overrightarrow{a},\ \text{czyli } X' = d(X)\overrightarrow{a} + X.$$

   Stąd

$$X' = \frac{2x-y+2z-1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5x-y+z-1\\3y\\-2x+y+z-1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\0 & 3 & 0\\-2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

7. Punkt $P = (1\,2\,-1)^T$ i wektor normalny do π $\overrightarrow{n} = (1\,1\,1)^T$. Niech R oznacza rzut punktu P na płaszczyznę π, P' punkt symetryczny do P względem π. Równanie prostej l prostopadłej do płaszczyzny π i przechodzącej przez punkt P jest postaci:$X = t(1\,1\,1)^T + (1\,2\,-1)^T$. Ponieważ R jest punktem przecięcia l i π, więc $t+1+t+2+t-1+1 = 0$, czyli $t=-1$. Stąd $R = (0\,1\,-2)^T$ i $P' = 2R-P = (-1\,0\,-3)^T$.

8. Mamy punkt $P = (2\,0\,1)^T$ oraz prostą $l : (xyz)^T = t(2\,2\,1)^T + (1\,0\,0)^T$.
   Równanie ogólne płaszczyzny prostopadłej do prostej l ma postać: $2x+2y+z+d = 0$. Ponieważ chcemy, aby do tej płaszczyzny należał punkt P, więc $2\cdot 2+1+d = 0$, czyli $d=-5$. Szukamy rzutu R punktu P na prostą l. Ponieważ R leży na l, więc $R = (2t+1\,2t\,t)^T$ dla pewnego t. Skoro R leży również na wyznaczonej płaszczyźnie, więc jego współrzędne spełniają równanie tej płaszczyzny. Stąd otrzymujemy $t = \frac{1}{3}$. Zatem $R = \frac{1}{3}(5\,2\,1)^T$.
   Punkt symetryczny P' do punktu P spełnia równanie

$$R = \frac{P+P'}{2},\ \text{czyli } P' = 2R-P = \frac{1}{3}(4\,4\,-1)^T.$$

9. a) $F(X) = \frac{1}{A^2+B^2+C^2}(ABC)(xyz)^T$.

b) $F(X) = (pqr)(xyz)^T$.

c) $F(X) = \begin{pmatrix} 0 & r & q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \cdot X$.

d) $F(X) = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \cdot X$, gdzie $(a\,b\,c)^T \neq t(d\,e\,f)^T, t \in \mathbb{R}$.

e) $F(X) = det \begin{pmatrix} x & a & d \\ y & b & e \\ z & c & f \end{pmatrix}$.

10.

podpunkt	różnowartościowe	na	odwracalne
(a)	$-$	$+$	$-$
(b)	$-$	$+$	$-$
(c)	$-$	$+$	$-$
(d)	$+$	$-$	$-$
(e)	$-$	$+$	$-$