

WSTĘP DO TEORII GIER

Szczegółowy plan wykładu

1. Wprowadzenie i przykłady gier

gry wielosobowe, dwuosobowe, dwuosobowe o sumie zero, wieloetapowe, losowe

2. Podstawowe pojęcia

strategia: czysta, mieszana, wartość gry i . gracza, punkt równowagi Nasha i niektóre jego własności, dominacja, twierdzenie Nasha o istnieniu punktu RN, twierdzenie Nasha o nośnikach

3. Gry z niepełną informacją

4. Gry o sumie zero

własności strategii optymalnych,
metody rozwiązywania niektórych typów gier macierzowych

5. Schemat arbitrażowy Nasha

6. Posunięcia strategiczne

uzgodnienia kolejności ruchów graczy, obietnice, groźby

7. Gry wielosobowe i koalicje

gry w postaci funkcji charakterystycznej, imputacje, dominacje, rdzeń, wartość Shapleya, nukleolus, punkt Gatelę'ego

Literatura

1. R. D. Luce, H. Raiffa, *Gry i decyzje*
2. Ph. Straffin, *Game Theory and Strategy*
3. T. Płatkowski, *Wstęp do teorii gier*
4. S. Tadelis, *Game Theory*

Zasady zaliczenia ćwiczeń będą podane na pierwszym wykładzie

Wstęp do teorii gier

Lista zadań nr 1

Dla opisanych poniżej gier określ zbiory strategii graczy, funkcję (macierz) wypłat oraz wartości gry każdego gracza. Zakładamy, że cztery ostatnie są grami dwuosobowymi o sumie zero.

1. Uczestnicy tej wieloosobowej gry rozważają podjęcie pewnej inicjatywy – akcji. Każdy z nich ma do wyboru jedną z dwóch decyzji: "wziąć w niej udział" lub "pozostać z boku". Jeśli więcej niż połowa uczestników przyłączy się do akcji, to każdy z nich otrzymuje wypłatę 100. Gdy uczestnicy, którzy tak zdecydują, nie osiągną większości, to każdy z nich zapłaci "karę" wysokości 10. W każdym przypadku gracze, którzy nie przyłączą się do akcji, ani nie otrzymują premii, ani nie płacą kary.
2. Dwóch myśliwych może polować na jelenia (J) lub zające (Z). Ich decyzje zapadają równocześnie i niezależnie (tzn. bez wiedzy o decyzji drugiego). Jeleń ma wartość 4, zające po 1. Jeśli obaj zapolują na jelenia, to upolują go, otrzymując po 2. Jeśli jeden wybierze J, a drugi Z, to pierwszy nic nie upoluje, a drugi upoluje zająca. Jeśli obaj wybiorą Z, otrzymują po 1.
3. Dwóch pracowników wykonuje pewną pracę, przy czym każdy z nich może pracować (wtedy $s_i = 1$) lub udawać pracę (wtedy $s_i = 0$), $i = 1, 2$. Jeśli gracz pracuje, ponosi koszt 3, jeśli tylko udaje 0. Wynik pracy wynosi $2(s_1 + s_2)$ dla każdego z nich, niezależnie od tego, czy pracował, czy udawał.
4. Dwóch kierowców stoi na drodze zasypanej przez lawinę. Całkowity nakład energii potrzebny do odsnieżenia drogi wynosi $c > 0$, korzyść każdego z nich z dojechania do domu to $b > c$. Energia (wypłata) każdego gracza, gdy obaj nic nie robią wynosi $a < b - c$.
5. Dwóch graczy ma do podziału kwotę 100. A proponuje B podział: x dla B, reszta dla A, gdzie $x \in \{1, 2, \dots, 100\}$. Gracz B może się zgodzić i wtedy wypłaty są takie, jak zaproponował A, albo nie zgodzić i wtedy każdy otrzymuje zero.
6. Każdy gracz rzuca dwie lub trzy kostki i jednocześnie jedną monetę. Jeśli I gracz wybierze l_1 kostek, a drugi gracz l_2 kostek oraz n jest liczbą orłów, które pojawiły się w rzutach obu graczy, to I gracz otrzymuje wygraną równą

$$W_n(l_1, l_2) = |l_1 - 2n| + |l_2 - 2n|.$$

7. W uproszczonej wersji włoskiej gry *Morra* każdy z graczy pokazuje jeden lub dwa palce i jednocześnie zgaduje, ile palców pokaże przeciwnik. Jeśli obaj odgadną albo pomylą się, wypłata wynosi zero. Jeśli tylko jeden odgadnie, otrzymuje wypłatę równą sumie palców wystawionych przez obu graczy.
8. Dane są trzy identyczne zbiory: $L_I = L_{II} = L = \{1, 2, 3, 4\}$. Gracz I wybiera liczbę x ze zbioru L_I , a gracz II liczbę y ze zbioru L_{II} . Następnie ze zbioru L losuje się liczbę Q . Po ujawnieniu liczb x, y, Q wygraną (100) otrzymuje gracz I, jeśli spełniona jest jedna z nierówności:

$$y < x < Q, \quad Q < x < y.$$

Taką samą wygraną otrzymuje gracz II, jeśli spełniona jest jedna z nierówności:

$$x < y < Q, \quad Q < y < x.$$

Wygrane są zerowe (następuje remis), jeśli nie zachodzi żadna z powyższych nierówności.

9. Gracz I wybiera jedną z trzech kart: *króla*, 10 lub 2. Wtedy gracz II zgaduje S lub M . Jeśli ma rację (*król* jest kartą starszą S , a 2 – młodszą M), otrzymuje kwotę 3 od gracza I, a płaci mu kwotę 2, gdy się pomyli. Jeśli I gracz wybrał 10, to gracz II wygra kwotę 2, jeśli oceni ją jako M , ale gracz I będzie musiał wybierać między *królem* a 2, jeśli gracz II oceni 10 jako S . Wtedy gracz II znów zgaduje: S lub M i wygra kwotę 1, jeśli ma rację, a traci kwotę 3 w przeciwnym razie.

Wstęp do teorii gier

Lista zadań nr 2

1. Wyznacz punkty równowagi Nasha (punkty RN) dla gier opisanych w zadaniach 1 - 5 listy 1.
2. Pokaż, że para strategii mieszanych $((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$ stanowi punkt RN w grze *Kot – Mysz*.
3. Uzasadnij, że w grze dwuosobowej o sumie zero określenie punktu RN sprowadza się do:

$$W_1(x, \bar{y}) \leq W_1(\bar{x}, \bar{y}) \leq W_1(\bar{x}, y), \quad x \in X, y \in Y.$$

4. Sprawdź, czy istnieją punkty siodłowe dla gier opisanych w zadaniach 6 - 9 listy 1.
5. Udowodnij tw. Brouwera o punkcie stałym dla funkcji ciągłej na prostej rzeczywistej.
Wsk. Zauważ, że $A = [a, b]$ i rozważ funkcję $g(x) = \Gamma(x) - x$.
6. Uzasadnij, że zbiór strategii mieszanych gracza jest zbiorem wypukłym, ograniczonym i domkniętym.
7. Udowodnij następujący lemat:
Jeśli $X = \{x = (x_1, \dots, x_n), \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0\}$, to dla dowolnych $s_1, \dots, s_n$ zachodzi

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^n x_i s_i = \max\{s_1, \dots, s_n\}.$$

8. Dla gier o następujących macierzach wypłat wyznacz wszystkie punkty RN:

$$M = \begin{pmatrix} (2, 1) & (3, 5) \\ (1, 5) & (4, 2) \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} (3, 3) & (-1, 5) \\ (5, -1) & (0, 0) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} (1, 0) & (2, 2) \\ (3, 3) & (1, 1) \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} (1, 0) & (3, 4) & (1, 3) \\ (1, 1) & (2, 0) & (3, 2) \\ (3, 3) & (2, 0) & (2, 5) \end{pmatrix}.$$

9. Rozważając maksima funkcji wypłat obu graczy wyznacz wszystkie punkty RN dla gry o następującej macierzy wypłat

$$P = \begin{pmatrix} (3, 3) & (0, 2) & (0, 2) \\ (2, 0) & (2, 2) & (2, 0) \\ (2, 0) & (0, 2) & (3, 3) \end{pmatrix}.$$

10. Stosując twierdzenie Nasha o nośnikach wyznacz wszystkie punkty RN dla gry:

$$R = \begin{pmatrix} (7, 2) & (2, 7) & (3, 6) \\ (2, 7) & (7, 2) & (4, 5) \end{pmatrix}.$$

11. Sprawdź, czy dla poniższej gry istnieją punkty RN o nośnikach postaci
 - a) $\{2, 3\} \times \{1, 2\}$;
 - b) $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$;

$$V = \begin{pmatrix} (1, 1) & (-2, 0) & (-2, 0) \\ (0, -2) & (-2, 0) & (1, 1) \\ (0, -2) & (0, 0) & (0, -2) \end{pmatrix}.$$

Wyznacz ponadto wszystkie punkty RN w zbiorze strategii czystych.

12. Uzasadnij, że wypłata dla punktu RN jest równa wypłacie dla dowolnej strategii czystej z nośnika strategii mieszanej występującej w tym punkcie RN.
13. Sprawdź, czy znalezione w poprzednich zadaniach punkty RN w zbiorach strategii czystych są optymalne w sensie Pareto.
14. Uzasadnij, że w grach o sumie zero wszystkie strategie są optymalne w sensie Pareto.

Wstęp do teorii gier

Lista zadań nr 3

1. Dla rozważanej na wykładzie gry wejścia wylicz pozostałe elementy macierzy wypłat.
2. Przyjmując w powyższej grze $p = 2/3$ pokaż, że macierz wypłat jest postaci

$$\begin{pmatrix} (0, 2) & (0, 2) & (0, 2) & (0, 2) \\ (1, 1) & (1/3, 4/3) & (-1/3, -1/3) & (-1, 0) \end{pmatrix}.$$

Sprawdź, że w zbiorach strategii czystych $X = \{O, E\}$ oraz $Y = \{AA, AF, FA, FF\}$, odpowiednio, gra ma punkty RN postaci: (O, FA) , (O, FF) oraz (E, AF) .

3. Korzystając z drzewa gry "game of chicken" omawianej na wykładzie wyznacz macierz wypłat, a potem przyjmując $R = 8, H = 16, L = 0$, czyli dla macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} (0, 0) & (0, 4) & (0, 4) & (0, 8) \\ (4, 0) & (-1, -1) & (-1, 3) & (-6, 2) \\ (4, 0) & (3, -1) & (3, 3) & (2, 2) \\ (8, 0) & (2, -6) & (2, 2) & (-4, -4) \end{pmatrix}$$

wszystkie punkty RN.

4. Wyznacz punkty RN dla dwuosobowej gry z niepełną informacją określonej przez

- zbiory typów graczy $\Theta_1 = \{t\}, \Theta_2 = \{t_1, t_2\}$;
- zbiory akcji $A_1 = \{a, b\}, A_2 = \{c, d\}$;
- przekonania graczy: $\Phi_1(t_1|t) = 0.6, \Phi_2(t|t_i) = 1, i = 1, 2$
- macierze wypłat w zależności od poszczególnych typów II gracza, tzn. dla t_1, t_2 , odpowiednio:

$$\begin{pmatrix} (1, 2) & (0, 1) \\ (0, 4) & (1, 3) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (1, 3) & (0, 4) \\ (0, 1) & (1, 2) \end{pmatrix}.$$

5. Producent poddał trzy rodzaje hamulców: I, II oraz III testom w trzech różnych rodzajach warunków drogowych: A, B i C. Procent zadowolających prób podaje poniższa tabela:

Hamulce	A	B	C
I	85.0	75.0	95.0
II	85.0	90.0	75.5
III	85.0	65.0	92.0

Który rodzaj hamulców ma wybrać do produkcji, jeśli

- a) nie zna częstości występowania poszczególnych warunków drogowych,
- b) jest umiarkowanym optymistą, tzn. jego współczynnik optyimizmu wynosi $p = 0.5$,
- c) zależy mu na zminimalizowaniu straty z powodu podjęcia niewłaściwej decyzji.

Wstęp do teorii gier

Lista zadań nr 4

Wszystkie zadania tej listy dotyczą gier dwuosobowych o sumie zero.

1. Pokaż, że dodanie stałej do wszystkich wyrazów macierzy wypłat nie zmienia zbioru strategii optymalnych obu graczy. Jak zmienia wartość gry?

A jeśli pomnożymy wyrazy macierzy wypłat przez stałą różną od zera?

2. Sprawdź, czy wektory

$$x = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad y = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

są optymalnymi strategiami w grze o macierzy wypłat postaci

$$W = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jeśli tak, to podaj wartość tej gry, jeśli nie, jej oszacowanie.

3. Sprawdź, czy wektory

$$x = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad y = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

są optymalnymi strategiami w grze o macierzy wypłat postaci

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jeśli tak, to podaj wartość tej gry, jeśli nie, jej oszacowanie.

4. Znajdź rozwiązania gier o następujących macierzach wypłat:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & 4 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 2 & 10 \\ 8 & 0 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -1 \\ 9 & -1 & 4 & -2 \\ 7 & 6 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \\ -1 & 6 & -3 & 6 \\ 7 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Wiedząc, że $x = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ jest strategią optymalną I gracza oraz $y = \left(\frac{1}{4}, u, w\right)$, $u, w > 0$, jest strategią optymalną II gracza w grze o macierzy wypłat

$$C = \begin{pmatrix} a & -1 & b \\ 1 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

znajdź wartości parametrów a, b, u, w oraz wartość gry.

Wstęp do teorii gier

Lista zadań nr 5

1. Znajdź rozwiązanie przetargowe Nasha dla gry o macierzy wypłat postaci:

$$\begin{pmatrix} (2, 6) & (20, 10) \\ (10, 20) & (3, 4) \end{pmatrix},$$

przyjmując za współrzędne punktu SQ poziomy bezpieczeństwa każdego z graczy.

2. Przypuśćmy, że dwaj gracze mają w wyniku negocjacji wybrać jeden z wyników:
a) $A(0, 0), B(2, 0), C(4, 2), D(1, 5)$,
b) $A(1, 8), B(6, 7), C(8, 6), D(9, 5), E(10, 3), F(11, -1), G(-1, -1)$
bądź pewien rozkład probabilistyczny na nich. W obu przypadkach, jeśli nie dojdą do porozumienia, mają zagwarantowane wypłaty $(2, 1)$. Wyznacz dla obu zagadnień rozwiązanie przetargowe Nasha.
3. Dla każdej z poniższych macierzy wypłat porównaj rozwiązania przetargowe Nasha dla punktów SQ będących poziomami bezpieczeństwa z rozwiązaniami dla punktów SQ odpowiadających strategiom gróźb:

$$M = \begin{pmatrix} (1, 3) & (10, 5) \\ (5, 10) & (3/2, 2) \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} (3, 4) & (4, 3) \\ (2, 2) & (1, 0) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} (0, -10) & (10, 0) \\ (0, 10) & (-10, 0) \end{pmatrix}.$$

4. Rozważmy problem arbitrażu w grze o zbiorach strategii postaci $X = \{A, B\}$, $Y = \{C, D\}$, oraz następującej macierzy wypłat:

$$\begin{pmatrix} (0, 1) & (6, 2) \\ (3, 9) & (1, 0) \end{pmatrix}.$$

Wiadomo, że jedna z metod arbitrażu prowadzi do wyniku postaci

$$\frac{17}{43}AD + \frac{26}{43}BC = (4.19, 6.23).$$

Porównaj ten wynik z arbitrażem opartym na schemacie Nasha przy punkcie SQ

- a) w poziomach bezpieczeństwa;
b) w optymalnych strategiach gróźb.

Wstęp do teorii gier

Lista zadań nr 6

1. Dla rozważanych na wykładzie gier w przykładach: 2.4. oraz 2.5. pokaż, że jakakolwiek kolejność wyboru strategii przez poszczególnych graczy nie zmieni rezultatu gry uzyskanego w wyniku jednoczesnego podejmowania decyzji przez graczy.
2. Nawiązując ponownie do gier omawianych na wykładzie uzasadnij, że gracz I może uwiarygodnić swoje posunięcia strategiczne (obietnice, groźby) obniżając swoją wypłatę:
 - a) za strategię Ba z 5 do 2 w grze z przykładu 2.5.;
 - b) za strategię Ab z 1 do -1 oraz za Ba z 4 do 2 w grze z przykładu 2.6.
3. Wyniki w poniższych grach nie pozwalają osiągnąć I graczowi jego maksymalnej wypłaty. Dla każdej z nich sprawdź, czy gracz I może zyskać wykonując co najmniej jedno z następujących posunięć strategicznych:
 - a) zagwarantować sobie pierwszy ruch,
 - b) zmusić do wykonania pierwszego ruchu gracza II,
 - c) sformułować groźbę,
 - d) sformułować obietnicę,
 - e) sformułować obietnicę i groźbę.

W jaki sposób gracz I może uwiarygodnić swoją deklarację?

$$M = \begin{pmatrix} (3, 4) & (4, 3) \\ (2, 2) & (1, 1) \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} (3, 4) & (4, 2) \\ (2, 3) & (1, 1) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} (2, 4) & (3, 3) \\ (1, 2) & (4, 1) \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} (2, 2) & (4, 1) \\ (1, 3) & (3, 4) \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} (3, 2) & (1, 1) \\ (2, 4) & (4, 3) \end{pmatrix}.$$

4. Podaj przykład gry mającej rozwiązanie w ścisłym sensie, niewrażliwej ani na uzgodnienia kolejności ruchów graczy, ani na groźby, ani na obietnice.
5. Rozważmy grę, w której stronami są: porywacz i wzięty przez niego zakładnik. Porywacz może zabić zakładnika bądź go uwolnić, zakładnik może zapłacić okup bądź nie, a w razie uwolnienia zgłosić porwanie policji bądź nie. Wypłaty dla porywacza wynoszą kolejno: 5, gdy dostanie okup, -2 , gdy porwanie zostanie zgłoszone oraz -1 , gdy zabije zakładnika. Wypłaty zakładnika to, odpowiednio: -10 , gdy zostanie zabity, -2 , gdy zapłaci okup oraz 1, gdy zgłosi porwanie policji. Zakładamy, że wypłaty każdego gracza dodają się, tzn. gdy, na przykład porywacz dostanie okup, ale porwanie zostanie zgłoszone, to jego wypłata wynosi $5 - 2 = 3$.
 - a) Utwórz drzewo gry oraz macierz wypłat;
 - b) wyznacz punkty RN;
 - c) przyjmując, że zakładnik jest w stanie przekonać porywacza obietnicą lub groźbą, zaproponuj jej sformułowanie i wyznacz nowe rozwiązanie gry;
 - d) wykonaj podpunkt c) w odniesieniu do porywacza.

Wstęp do teorii gier

Lista zadań nr 7

1. W nawiązaniu do omawianej na wykładzie gry z przykładu 2.7. rozważ dwie możliwe pozostałe koalicje, wyznacz ich wartości, strategie optymalne graczy tworzących koalicje oraz grających samodzielnie.
2. Korzystając z wyników poprzedniego zadania wyznacz oczekiwane wypłaty poszczególnych graczy. Czy na ich podstawie możemy przewidywać, jakie powstaną koalicje?
3. Dwie poniższe macierze odpowiadają wypłatom w grze trzyosobowej dla strategii czystych α oraz β III gracza, odpowiednio

$$\begin{pmatrix} (4, 3, 3) & (1, 2, 7) \\ (3, 5, 2) & (0, 4, 6) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (3, 6, 1) & (2, 5, 3) \\ (2, 7, 1) & (1, 6, 3) \end{pmatrix}.$$

- a) Wyznacz dla tej gry o stałej sumie punkty RN (wykorzystając diagram ruchu oraz ewentualne dominacje);
 - b) ułóż i rozwiąż grę odpowiadającą sytuacji, gdy powstaje koalicja II i III gracza przeciwko I graczowi oraz wyznacz oczekiwane wypłaty poszczególnych graczy;
 - c) to samo dla dwóch pozostałych koalicji;
 - d) wyznacz najbardziej pożądanego partnera koalicyjnego każdego z graczy;
 - e) wyznacz funkcję charakterystyczną gry dla sytuacji, gdy dopuszczamy wypłaty uboczne.
4. Skonstruuj grę w postaci funkcji charakterystycznej modelującą następującą sytuację:
A. jest przewodniczącym komisji, w skład której wchodzi także B., C. oraz D. Komisja podejmuje decyzje poprzez głosowanie większościowe, w przypadku równego rozkładu głosów decyduje głos przewodniczącego.
 5. Wyznacz normalizację względem 0 – 1 gry:

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(I) = 1, \quad v(II) = 2, \quad v(III) = 3,$$

$$v(\{I, II\}) = 5, \quad v(\{I, III\}) = 7, \quad v(\{II, III\}) = 9, \quad v(\{I, II, III\}) = 12.$$

6. Dla gry w postaci funkcji charakterystycznej

$$v(\emptyset) = v(I) = v(II) = v(III) = 0, \quad v(\{I, II\}) = 5,$$

$$v(\{I, III\}) = 2, \quad v(\{II, III\}) = 3, \quad v(\{I, II, III\}) = 6.$$

zaznacz na trójkącie imputacji rdzeń. Które imputacje wyznaczają jego wierzchołki?

7. Wyznacz dla rozważanej na wykładzie gry *satelitów komunikacyjnych* normalizację względem 0 i pokaż, że rdzeń jest pusty.
8. Podaj warunek równoważny istnienia niepustego rdzenia trzyosobowej gry subaddytywnej znormalizowanej względem 0 – 1.
9. Wyznacz wartość Shaplaya dla:
 - a) gry *satelitów komunikacyjnych*;
 - b) gry opisanej w zadaniu 4.
10. Gra w postaci funkcji charakterystycznej jest określona następująco:

$$v(\emptyset) = v(A) = v(B) = v(C) = 0;$$

$$v(\{A, B\}) = 60, \quad v(\{B, C\}) = 100, \quad v(\{A, C\}) = 80, \quad v(N) = 135.$$

- a) Znajdź rdzeń tej gry.
- b) Wyznacz jej wartość Shapleya, nukleolus oraz punkt Gately'ego.