UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

M.Majsnerowska rok akademicki 2019/2020, semestr letni

KOMBINATORYKA

Szczegółowy plan wykładu

1. **Podstawowe narzędzia kombinatoryki**
   1.1. Zbiory i prawa działań na zbiorach (przypomnienie i uzupełnienie),
   1.2. Równania rekurencyjne (m.in. nieporządki, ciąg Fibonacciego),
   1.3. Metody ich rozwiązywania (m.in funkcje tworzące).

2. **Główne zasady kombinatoryki**
   2.1. Zasada dodawania,
   2.2. Zasada włączania i wyłączania,
   2.3. Fundamentalna reguła mnożenia.

3. **Podstawowe modele kombinatoryczne**
   3.1. Permutacje, wariacje, kombinacje z powtórzeniami i bez powtórzeń,
   3.2. Współczynniki Newtona i tożsamości kombinatoryczne.

4. **Podziały**
   4.1. Podziały zbiorów (liczby Bella, liczby Stirlinga drugiego rodzaju),
   4.2. Podziały liczb.

5. **Elementy rachunku prawdopodobieństwa**
   5.1. Pojęcie prawdopodobieństwa i podstawowe własności,
   5.2. Niezależność zdarzeń,
   5.3. Ciągi binarne i schemat Bernoullego
   5.3.1. Serie w ciągu binarnym,
   5.3.2. Ciągi binarne zdominowane (liczby Catalana),
   5.3.3. Liczba sukcesów w schemacie Bernoullego.

6. **Elementy teorii grafów**
   6.1. Podstawowe pojęcia,
   6.2. Twierdzenie Eulera.

Podstawową literaturę przedmiotu stanowią *Wykłady z kombinatoryki* Z. Palki i A. Rucińskiego

Zasady zaliczenia ćwiczeń
W ciągu semestru odbędzie się 5 zapowiedzianych kartkówek, przy czym bezwzględnie wymagana jest **obecność na co najmniej 3** z nich. Za kartkówki można otrzymać łącznie 50 punktów, dodatkowe 10 punktów można zebrać za aktywność na ćwiczeniach.
Na poszczególne oceny potrzeba co najmniej:
27 punktów, w tym co najmniej 22 za kartówki – dostateczny,
39 punktów, w tym co najmniej 31 za kartkówki – dostateczny plus,
45 punktów, w tym co najmniej 36 za kartkówki – dobry,
51 punktów, w tym co najmniej 40 za kartkówki – dobry plus,
54 punkty, w tym co najmniej 44 za kartkówki – bardzo dobry.

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

M.Majsnerowska rok akademicki 2019/2020

KOMBINATORYKA (A)
LISTA ZADAŃ (1)
(POWTÓRZENIOWA)

Niech p, q, r, s oznaczają zdania, a A, B, C, D, E, F zbiory w pewnej ustalonej przestrzeni Ω.

1. Sformułuj i udowodnij dla dowolnej skończonej liczby zdań:
   a) prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji,
   b) prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy.

2. Sprawdź, czy następujące wyrażenie jest tautologią:
$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow q)] \Rightarrow [(p \wedge r \wedge s) \Rightarrow q].$$

3. Sformułuj i udowodnij dla dowolnej skończonej liczby zbiorów;
   a) prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania,
   b) prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia,
   c) drugie z praw de Morgana o dopełnieniu iloczynu zbiorów).

4. Stwierdź, które z następujących relacji są prawdziwe:
   a) $(A \cap C) \setminus (B \cup D) \setminus (E \cup F) = (A \setminus B \setminus E) \cap (C \setminus D \setminus F)$,
   b) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap (C \cup B)$,
   c) $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap C))$,
   d) $A \cap B \cap C \subset (A \cap B) \cup (C \cap B) \cup (A \cap C)$,
   e) $(A \cup B)' \cap C = (A' \cap C) \cup (B' \cap C)$,
   f) $(A \cap C) \setminus (D \cap B) = (A \setminus B) \cap (C \setminus D)$.

5. Znajdź wyrażenie określające zbiór elementów ze zbiorów A, B, C:
   a) należących tylko do zbioru C,
   b) należących do zbiorów A i B oraz nie należących do zbioru C,
   c) należących do wszystkich trzech zbiorów,
   d) należących do co najmniej jednego z nich,
   e) należących do co najmniej dwóch z nich,
   f) należących do dokładnie dwóch z nich,
   g) nie należących do żadnego z nich,
   h) należących do co najwyżej dwóch z nich.

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

M.Majsnerowska rok akademicki 2019/2020

KOMBINATORYKA (A)
LISTA ZADAŃ (2)

1. Wylicz, ile jest rozmieszczeń trzech przedmiotów w trzech pudełkach rozważając wszystkie cztery przypadki dotyczące rozróżnialności (tzn. gdy rozróżniamy i przedmioty, i pudełka, gdy rozróżniamy albo przedmioty, albo pudełka oraz gdy nie rozróżniamy ani przedmiotów, ani pudełek).

2. Wylicz, na ile sposobów można przedstawić liczbę 20 jako sumę pięciu naturalnych składników, z których każdy należy do przedziału $[3, 7]$.

3. Rozważmy kratę utworzoną z pięciu poziomych i czterech pionowych odcinków. Wyznacz wszystkie najkrótsze trasy z lewego górnego rogu do dolnego prawego rogu tej kraty (ruch odbywa się jedynie w dół i w prawo).

4. W nawiązaniu do omawianego na wykładzie przykładu ”Wieża w Hanoi” wylicz kilka początkowych wyrazów ciągu i na ich podstawie zaproponuj jawną postać ogólnego wyrazu tego ciągu. Następnie uzasadnij ją stosując indukcję.

5. Korzystając z wyprowadzonego na wykładzie wzoru rekurencyjnego udowodnij równość
$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n,\ n = 2, \dots$$

6. Dla ciągu Fibonacciego $\{F_n, n = 1, 2, \dots\}$ udowodnij
   a) $F_{m+n} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}$,
   b) $\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$,
   c) $\sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} = F_{2n+2} - 1$.

7. Niech a_n oznacza liczbę sposobów, na które można podzielić zbiór $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ na dwa niepuste podzbiory.
   Znajdź zależność rekurencyjną dla a_n, wylicz dwa pierwsze wyrazy oraz znajdź jawny wzór na ogólny wyraz tego ciągu.

8. Niech a_n oznacza liczbę sposobów, na które możemy ułożyć wieżę wysokości n cm z klocków, jeśli mamy do dyspozycji klocki białe i czarne o wysokości 1 cm oraz klocki czerwone, zielone i żółte o wysokości 2 cm.
   Znajdź zależność rekurencyjną dla a_n, wylicz trzy pierwsze wyrazy oraz znajdź jawny wzór na ogólny wyraz tego ciągu.

9. Wewnątrz reaktora jądrowego znajdują się dwa typy cząstek: α oraz β. W każdej sekundzie cząstka α rozpada się na 3 cząstki typu β, a cząstka β na 1 cząstkę α i 2 cząstki β. W chwili $n = 0$ umieszczono w reaktorze 1 cząstkę α.
   Znajdź równanie rekurencyjne, a potem jawny wzór na liczbę wszystkich cząstek w chwili n.

10. Przypuśćmy, że mamy n ustawionych szeregowo klatek, w których chcemy rozmieścić k jednakowych lwów tak, by żadne lwy nie sąsiadowały ze sobą. Niech $g(n, k)$ będzie liczbę takiego rozmieszczenia zwierząt. Uzasadnij, że
a) $g(6, 3) = 4$,
b) $g(2k, k) = k + 1$,
c) $g(n, k) = g(n - 2, k - 1) + g(n - 1, k),\ k = 2, 3, \ldots$.

11. W pewnej populacji każdy osobnik rodzi pierwszego potomka po dwóch miesiącach od narodzin, a kolejne (po jednym) co miesiąc. Przypuśćmy, że w chwili zerowej populacja składa się z jednego osobnika. Jaka jest jej liczebność po 7 miesiącach?

12. Wprowadźmy uogólniony ciąg Fibonacciego określając:

$$u_0 = a, u_1 = b,\ u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n,\ B \neq 0.$$

Udowodnij, że
i) jeśli $A^2 + 4B \neq 0$, to
$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} b + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} aB,$$
gdzie α i β są różnymi pierwiastkami równania $x^2 = Ax + B$;
ii) jeśli $A^2 + 4B = 0$, to
$$u_n = nb(A/2)^{n-1} - (n - 1)a(A/2)^n.$$

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

M.Majsnerowska rok akademicki 2019/2020

KOMBINATORYKA (A)
LISTA ZADAŃ (3)

1. Spośród sześciu książek autorstwa X, siedmiu Y oraz jedenastu Z wybieramy dwie. Na ile sposobów możemy je wybrać tak, by w każdej parze znalazły się dzieła różnych pisarzy?

2. Tworzymy uporządkowane pary z liter słowa PARLAMENT.
a) Ile jest par złożonych z różnych liter?
b) Ile jest par, w których pierwsza litera jest samogłoską, a druga spółgłoską?
A jeśli użyjemy liter słowa RZECZPOSPOLITA?

3. Na ile sposobów można ustawić dwa króle na szachownicy o wymiarach $n \times m$ tak, aby nie stały na sąsiadujących polach?

4. Oblicz, ile jest liczb czterocyfrowych, w których
a) cyfra setek jest dwa razy mniejsza niż cyfra dziesiątek;
b) cyfra setek jest o dwa większa od cyfry dziesiątek.

5. Oblicz, na ile sposobów można wybrać z talii 52 kart po jednej karcie z każdego koloru oraz ile jest takich wyborów, jeśli wśród wyjętych kart nie może być ani jednej pary kart o tej samej wartości.

6. Szkoła ze 120 studentami oferuje kursy tenisa i jazdy konnej. Liczba studentów chodzących tylko na kurs tenisa jest dwa razy większa od liczby tych, którzy chodzą na jazdę konną (i być może na tenisa). Studentów nie uczęszczających na żaden kurs jest o 25 więcej niż tych, co chodzą na oba kursy. Wiadomo ponadto, że 75 studentów chodzi na co najmniej jeden kurs. Oblicz, ilu studentów uczęszcza na
a) kurs tenisa,
b) kurs jazdy konnej,
c) na oba te kursy.

7. W trzydziestoosobowej klasie dwudziestu uczniów uczy się łaciny, czternastu greki, a dziesięciu hebrajskiego. Jeśli żadne dziecko nie uczy się wszystkich trzech języków, a ośmioro nie uczy się żadnego, to ilu uczy się greki i hebrajskiego?

8. Wiedząc, że 50 studentów zaliczyło wykład A, 40 – wykład B, 30 – wykład C, 35 – wykłady A i B, 20 – wykłady B i C, 25 – wykłady A i C oraz 15 – wszystkie trzy wykłady, podaj, ilu studentów zaliczyło co najmniej jeden z wykładów.

9. Niech $A, B, C_i, i = 1, 2$, będą zbiorami w pewnej ustalonej przestrzeni Ω.
Wiadomo, że $|\Omega| = 100, |A'| = 60, |A \cup B| = 60, |A \cap B| = 10, |C_1 \cap C_2 \cap A| = 5, |C_1 \cap C_2| = 10,$ $B \cap C_i = \emptyset, |C_i| = 30, |A \cap C_i| = 15,\ i = 1, 2$. Wyznacz uzasadniając:
a) $|B|$;
b) $|A' \cap B' \cap C_1' \cap C_2'|$.

10. Podaj przykłady co najmniej dwóch liczb mających 18 różnych dodatnich dzielników.

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

M.Majsnerowska rok akademicki 2019/2020

KOMBINATORYKA (A)
LISTA ZADAŃ (4)

1. Oblicz liczbę tych permutacji zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, w których
   a) liczby 3,7 nie sąsiadują ze sobą;
   b) liczby 2,6,4 występują obok siebie w porządku malejącym.

2. Oblicz, ile liczb naturalnych zapisanych za pomocą różnych cyfr można utworzyć z 2,3,4,5 oraz ile jest takich liczb większych od 3 400.

3. Oblicz, w ilu punktach przecina się n prostych, z których żadne trzy nie tworzą pęku, jeśli
   a) nie ma wśród nich prostych równoległych;
   b) między nimi jest m prostych równoległych.

4. Młoda dama ma 3 kolory lakieru do paznokci. Oblicz, na ile sposobów może pomalować paznokcie u rąk (jeden paznokieć maluje tylko jednym kolorem), jeśli na jednej ręce nie mogą być więcej niż dwa kolory.

5. Oblicz, ilu jest uczniów w klasie, jeżeli wiadomo, że liczba sposobów, na jakie można z nich wybrać 3 osoby do pierwszej ławki jest 240 razy większa od liczby uczniów.

6. Oblicz, ile "słów" można utworzyć z 18 spółgłosek i 6 samogłosek, jeżeli każde "słowo" składa się z 2 samogłosek i 3 spółgłosek oraz samogłoski zajmują drugie i czwarte miejsca.

7. Oblicz, ile jest dziewięciocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 510 oraz ile spośród nich jest takich, w których wystąpią dokładnie dwie 7 i trzy 5.

8. Pewien student ma wybrać dwa wykłady z siedmiu. Oblicz, ile ma możliwości wyboru. A jeśli dwa wykłady odbywają się w tym samym czasie?

9. Oblicz, na ile sposobów można rozmieścić
   a) $M + 1$ jednakowych kul
   b) $M + 2$ jednakowych kul
   w M różnych komórkach tak, aby dokładnie jedna komórka pozostała pusta.

10. W kwiaciarni są trzy gatunki kwiatów. Wiadomo, że można z nich ułożyć 36 różnych bukietów po k kwiatów w każdym. Wyznacz k.

11. Oblicz, na ile sposobów można rozdać 20 nagród między 100 studentów, jeśli:
    a) każdy może otrzymać dowolną liczbę nagród,
    b) każdy może otrzymać co najwyżej jedną nagrodę.
    Rozważ oba przypadki: nagród rozróżnialnych i nierozróżnialnych.

12. Oblicz, ile różnych dziesięcioliterowych "słów" można utworzyć z liter słowa STATYSTYKA.

13. Oblicz, ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć z cyfr liczby 11 354 511.

14. Oblicz, na ile sposobów 14 osób może prowadzić jednocześnie 7 rozmów telefonicznych.

15. Wyznacz liczbę dziesięcioliterowych ciągów zbudowanych z elementów zbioru składającego się z 4 liter a, 4 liter b, 4 liter c i 4 liter d.

16. Oblicz, ile różnych "słów"
a) szesnastoliterowych,
b) jedenastoliterowych o każdej literze innej,
c) dwunastoliterowych zaczynających się i kończących literą "O"
można utworzyć z liter występujących w słowie WIELKOTYGODNIOWE.

17. Wiadomo, że z siedmiu cyfr można utworzyć 42 liczby siedmiocyfrowe. Oblicz, ile cyfr jest jednakowych.

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

M.Majsnerowska rok akademicki 2019/2020

KOMBINATORYKA (A)
LISTA ZADAŃ (5)

1. Uzasadnij, że liczba $\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4}$ jest całkowita.

2. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, pokaż, że

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} a^k b^{p-k} = \binom{n}{p}(a+b)^p, \quad n \geq p \geq 0,$$

a stąd przez odpowiednie podstawienie

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}, \quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0, \quad n \geq p \geq 0.$$

3. Udowodnij, że dla $n \geq 1$ i $a \in \mathcal{R}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a+1)^{k+1} - 1}{k(k+1)} - a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

4. Uzasadnij kombinatorycznie lub algebraicznie, że

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}, \quad m \geq n,$$

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}, \quad l \leq min(n,m),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1},$$

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \binom{m+1}{2}^2,$$

$$\sum_{i=0}^{l} \binom{n-i}{l-i}\binom{n}{i} = 2^l\binom{n}{l}, \quad n \geq l,$$

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

5. Oblicz wartości następujących sum:

$$1 + 2\binom{n}{1} + \ldots + (k+1)\binom{n}{k} + \ldots + (n+1)\binom{n}{n},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+bk),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2,$$

$$\sum_{n=1}^{k} n(k-n),$$

$$\sum_{n=1}^{m}(3n-1)(3n+2).$$

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

M.Majsnerowska rok akademicki 2019/2020

KOMBINATORYKA (A)
LISTA ZADAŃ (6)

1. W torebce znajdują się 4 rodzaje żujków: pomarańczowe, cytrynowe, truskawkowe i wiśniowe. Jeśli wyjmiemy z torebki dwa żujki, to prawdopodobieństwa tego, że jeden jest cytrynowy, a jeden pomarańczowy oraz tego, że obydwa są cytrynowe są równe. Podobnie, jeśli wyjmiemy z torebki dwa żujki, to prawdopodobieństwa tego, że jeden jest cytrynowy, a jeden truskawkowy oraz tego, że obydwa są truskawkowe są równe.
   Wyjmujemy losowo z torebki 3 żujki. Wylicz, co jest bardziej prawdopodobne: wyciągnięcie dwóch żujków truskawkowych i jednego pomarańczowego, czy wyciągnięcie dwóch żujków cytrynowych i jednego truskawkowego.

2. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród siedmiu losowo wybranych osób znajdą się co najmniej dwie, które urodziły się w tym samym dniu tygodnia. Oszacuj otrzymane prawdopodobieństwo za pomocą wzoru Stirlinga ($n! \approx (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$).

3. Z urny zawierającej 16 ponumerowanych kul czarnych i 2 różne białe losujemy m kul (bez zwracania). Podaj najmniejszą wartość liczby m, dla której prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz kuli białej jest większe od $\frac{1}{2}$.

4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy losowym rozmieszczeniu dziesięciu ponumerowanych kul w trzech oznaczonych różnymi kolorami komórkach:
   a) żadna nie pozostanie pusta,
   b) w każdej znajdą się przynajmniej trzy kule.

5. Rozmieszczamy losowo n ponumerowanych kul w m rozróżnialnych urnach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w 2. urnie znajdzie się dokładnie k kul.

6. Z talii 52 kart wylosowano 13 kart. Oblicz szanse otrzymania:
   a) 5 pików, 4 kierów, 3 trefli, 1 kara?
   b) układu 5-4-3-1?
   c) układu 5-3-3-2?
   d) układu 4-4-4-1.

7. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy losowym podziale 10 ciastek między 3 osoby każda osoba dostanie:
   a) przynajmniej jedno,
   b) przynajmniej dwa ciastka.

8. * Udowodnij **nierówność Bonferroniego**, że dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzi $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.
   Wiedząc, że $P(A) = 0.5$ oraz $P(B) = 0.9$, określ, jaka jest możliwie najmniejsza i największa wartość $P(A \cap B)$.

9. Niech $P(A) = x$ oraz $P(B) = x^2$. Wiadomo, że oba zdarzenia się wykluczają, ale jedno z nich musi zajść. Oblicz x.

10. Rzucamy niesymetryczną sześcienną kostką. Dwójka wypada z prawdopodobieństwem 1/3, piątka – 1/5, a pozostałe wyniki mają równe szanse wypadnięcia. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie liczba oczek mniejsza niż 4.

11. Jan i Piotr chodzą na wykład z fizyki. Jan chodzi na co drugi wykład, a Piotr opuszcza 10% wykładów. Obaj naraz są obecni na 45% wykładów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) choć jeden z nich jest na wykładzie,
b) dokładnie jeden z nich jest na wykładzie,
c) żaden z nich nie jest na wykładzie.

12. Losujemy kartę z talii 52 kart. Czy wylosowanie asa i wylosowanie karty czerwonej są zdarzeniami niezależnymi?

13. Rzucamy kostkę w kształcie ośmiościanu foremnego o ściankach ponumerowanychę od 1 do 8. Wszystkie wyniki występują jednakowo często. Niech A={1,2,3,4}, B=C= {1,5,6,7}. Zbadaj, czy zdarzenia {A,B,C} są niezależne.

14. Niech $P(A) = \frac{1}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Wiadomo, że zdarzenia A, B są niezależne.
Wylicz $P(B)$, $P(A \setminus B)$ oraz $P(A \cup B')$.

15. Bolek i Lolek strzelają na zmianę z łuku, przy czym trafiają w "10" z prawdopodobieństwami 1/4 oraz 1/3, odpowiednio.Wyniki poszczególnych prób są niezależne, a zawody rozpoczyna Bolek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Bolek trafi przed Lolkiem.

16. Paweł, Rysiek i Szymek rzucają (w podanej kolejności) monetę. Wygrywa ten, kto pierwszy wyrzuci reszkę. Znajdź szansę wygranej Ryśka.

17. Pracownik wytwarza n elementów pewnego urzadzenia. Niech A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, oznacza zdarzenie, że i. element jest wadliwy. Za pomocą wprowadzonych zdarzeń przedstaw zdarzenia oznaczające, że:
(a) co najmniej jeden z elementów jest wadliwy;
(b) tylko jeden element jest wadliwy.
Zakładając, że zdarzenia A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, są niezależne o jednakowym prawdopodobieństwie p, wyznacz prawdopodobieństwa zdarzeń z podpunktu (a).

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

M.Majsnerowska rok akademicki 2019/2020

KOMBINATORYKA (A)
LISTA ZADAŃ (7)

1. Oblicz, ile jest
   a) ciągów binarnych długości n,
   b) (n, m)–ciągów, które kończą się serią jedynek długości k.

2. Wyznacz liczbę ciągów o n zerach i m jedynkach zawierających k serii zer.

3. Oblicz, w ilu $(n-k, k)$–ciągach żadne dwa zera nie sąsiadują ze sobą.

4. Wyniki egzaminu 100 studentów można zapisać w postaci ciągu binarnego, przyjmując, że "1" oznacza zdanie egzaminu, a "0" jego niezaliczenie. Oblicz,
   a) ile jest takich ciągów typu $(80, 20)$,
   b) w ilu z nich wyniki osób, które zdały, ułożą się w 10 serii.

5. Dwadzieścia przedmiotów dzielimy między dwie osoby w ten sposób, że każdy przedmiot przypada losowo którejś z nich z prawdopodobieństwem 0.5. Wyznacz prawdopodobieństwo, że osoby dostaną niejednakową liczbę przedmiotów.

6. Oblicz, co jest bardziej prawdopodobne: otrzymanie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kości, czy co najmniej raz dwóch jedynek na obu kościach przy 24 rzutach 2 kości.

7. Wiadomo z obserwacji, że 5% pasażerów rezerwujących miejsce na pewien lot nie pojawia się. Linie lotnicze sprzedają więc 52 bilety na samolot mogący zabrać 50 pasażerów. Oblicz prawdopodobieństwo, że w losowo wybranym locie znajdzie się miejsce dla wszystkich pasażerów, którzy zgłoszą się przed odlotem samolotu.

8. Gracz w brydża nie otrzymuje asa w trzech kolejnych rozdaniach. Czy ma on podstawy do uskarżania się na brak szczęścia?

9. Matematyk wkłada do każdej kieszeni spodni nowe pudełka zapałek, po 50 sztuk w każdym. Ilekroć potrzebna mu jest zapałka, sięga do którejś z kieszeni – prawej lub lewej z prawdopodobieństwem 0.5. W pewnym momencie natrafia po raz pierwszy na puste pudełko. Oblicz prawdopodobieństwo, że w drugim pudełku znajduje się wtedy dokładnie jedna zapałka.

10. Oblicz, ile razy należy rzucić dwie różne kostki, aby prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej jeden raz sumy oczek równej 7 wynosiło co najmniej 0.95?
    Jakie jest prawdopodobieństwo, że taka suma oczek pojawi się po raz pierwszy w siódmym rzucie?

11. Wyznacz liczbę wszystkich grafów, dla których $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz tych z nich, dla których $E(G) = i, \quad i = 0, 1, \ldots, 6$.

12. Uzasadnij, że suma stopni wierzchołków pseudografu jest równa podwojonej liczbie jego krawędzi.