1.3. Metody rozwiązywania równań rekurencyjnych (c.d.)

Równanie rekurencyjne z przykładu 1.5. rozwiążemy metodą funkcji tworzących ciągu.

Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ będzie funkcją tworzącą ciągu $\{a_n,\ n=1,2,\dots\}$, gdzie $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $a_1 = 1$; $n = 2,3,\dots$ (do takiej zależności rekurencyjnej doszliśmy w tym przykładzie.) Zatem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1\cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1)\, x^n =$$

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + 2x \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k =$$

$$\frac{x}{1-x} + 2x f(x).$$

Stąd $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)\cdot(1-2x)} = \dfrac{2x}{1-2x} - \dfrac{x}{1-x}$.

Przedstawiając powyższe funkcje wymierne w postaci odpowiednich szeregów potęgowych otrzymujemy

$$a_n = 2^n - 1, \quad n = 1,2,\dots,$$

ponieważ $\dfrac{2x}{1-2x} - \dfrac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left((2x)^n - x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) x^n$

i jednoznaczność rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy daje powyższy wzór (jawny)! na a_n, $n=1,2,\dots$.

Rozdział 2. Główne zasady kombinatoryki

2.1. Zasada dodawania

Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są skończonymi (tzw. o skończonej liczności) zbiorami parami rozłącznymi ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$), to

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \qquad (2.1)$$

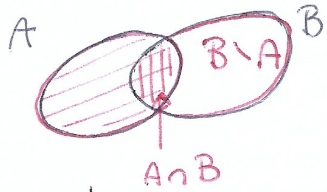
(liczność sumy zbiorów jest sumą liczności zbiorów)

Uwaga. Stosowaliśmy już tę bardzo intuicyjną zasadę wyprowadzając równania rekurencyjne dla $f(n,k)$ oraz D_n (przykłady 1.3, 1.4).

2.2. Zasada włączania i wyłączania

- Dla dowolnych skończonych zbiorów A i B mamy

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (2.2)$$



d-d Zauważmy, że

$$|A \cup B| = |A \cup (B \setminus A)| \overset{(2.1)}{=} |A| + |B \setminus A|, \qquad (*)$$

ponieważ A oraz $B \setminus A$ są zbiorami rozłącznymi.

Ponadto $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ oraz $B \setminus A$ i $A \cap B$ są rozłączne, czyli znów z (2.1) $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$.

Wyznaczając stąd $|B \setminus A|$ i wstawiając otrzymane wyrażenie do prawej strony $(*)$ otrzymujemy $(*)$.

- Dla dowolnych skończonych zbiorów A, B i C mamy

$$|A \cup B| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \qquad (2.3)$$

dowód wykorzystujący prawa: łączności dodawania zbiorów i rozdzielności mnożenia zbiorów względem ich dodawania pozostawiam jako ćwiczenie.

- Ogólnie: dla dowolnych skończonych zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ zachodzi:

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}|A_k| - \sum_{\substack{k<l\\ k,l=1}}^{n}|A_k\cap A_l| + \sum_{\substack{k<l<m\\ k,l,m=1}}^{n}|A_k\cap A_l\cap A_m| + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n| \qquad (2.4)$$

d-d przeprowadzimy przez indukcję, zakładając prawdziwość (2.4) i pokazując analogiczny wzór dla $n+1$ dowolnych zbiorów (dla $n=2$ jest to udowodniony już wzór (2.2)).

Na mocy przytoczonych wyżej praw działań na zbiorach oraz (2.4) mamy kolejno:

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right| \overset{(1.3)}{=} \left|\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\cup A_{n+1}\right| \overset{(2.2)}{=} \left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\cap A_{n+1}\right| \overset{(1.5)}{=}$$

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{k=1}^{n} (A_k\cap A_{n+1})\right| \overset{(2.4)}{=} \sum_{k=1}^{n}|A_k| + |A_{n+1}| - \sum_{\substack{k<l\\ k,l=1}}^{n}|A_k\cap A_l|$$

$$+ \sum_{\substack{k<l<m\\ k,l,m=1}}^{n}|A_k\cap A_l\cap A_m| + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n| - \Bigg(\sum_{k=1}^{n}|A_k\cap A_{n+1}| +$$

$$- \sum_{\substack{k<l\\ k,l=1}}^{n}|(A_k\cap A_{n+1})\cap(A_l\cap A_{n+1})| + \sum_{\substack{k<l<m\\ k,l,m=1}}^{n}|(A_k\cap A_{n+1})\cap(A_l\cap A_{n+1})\cap(A_m\cap A_{n+1})|$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\left|(A_1\cap A_{n+1})\cap(A_2\cap A_{n+1})\cap\ldots\cap(A_n\cap A_{n+1})\right|\Bigg) =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}|A_k| - \sum_{\substack{k<l\\ k,l=1}}^{n+1}|A_k\cap A_l| + \sum_{\substack{k<l<m\\ k,l=1}}^{n+1}|A_k\cap A_l\cap A_m| + \ldots + (-1)^{n}|A_1\cap\ldots\cap A_n\cap A_{n+1}|$$

Przykłady zastosowań powyższych wzorów występują w zadaniach listy 3.

2.3. Fundamentalna reguła mnożenia

Liczba ciągów takich, że pierwszy element pochodzi ze zbioru A_1, drugi element z A_2, i.t.d, n. element ze zbioru A_n, przy czym wszystkie te zbiory są skoń-

czone, jest równa
$$|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_n|. \qquad (2.5)$$
Inaczej (w równoważnym sformułowaniu)
Należy dokonać wielokrotnego wyboru, przy czym
w 1. kroku wybieramy spośród m_1 możliwości,
w 2. — " — " — " — m_2 — " —,
⋮
w k. kroku wybieramy spośród m_k możliwości.
Jeśli kolejne wybory dokonywane są niezależnie, to liczba wszystkich wyników tego wielokrotnego wyboru jest postaci
$$m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k. \qquad (2.5')$$

Przykład 2.1. Na szczyt góry M można dostać się wychodząc z obozu I u jej podnóża i przechodząc przez dwa obozy pośrednie II i III. Z I do II prowadzi 5 tras, z II do III – 3 trasy, natomiast z III na szczyt góry można dostać się 2 trasami. Obliczmy, ile różnych wycieczek startujących z obozu I, a mających za cel wierzchołek góry M można zorganizować.
Trasę wycieczki określimy dokonując dwukrotnie wyboru przejścia do następnego obozu, a następnie na szczyt. Zatem według reguły (2.5) mamy
$$5\cdot 3\cdot 2 = 30$$
takich tras.

Przykład 2.2. Obliczmy, ile różnych dzielników dodatnich ma liczba
$$N = p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n},$$
gdzie $p_1,\ldots,p_n$ są różnymi liczbami pierwszymi, a $k_1,\ldots,k_n$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

Zauważmy, że każdy dodatni dzielnik liczby N jest postaci

$$n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{l_n},$$

gdzie $l_1 \in \{0, 1, \ldots, k_1\}$,

$l_2 \in \{0, 1, \ldots, k_2\}$,

$\vdots$

$l_n \in \{0, 1, \ldots, k_n\}$.

Aby jednoznacznie określić dzielnik n musimy wybrać ciąg $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, co zgodnie z regułą (2.5) możemy wykonać na

$$(k_1+1) \cdot (k_2+1) \cdot \ldots \cdot (k_n+1) \text{ sposobów,}$$

ponieważ l_i należy do zbioru o (k_i+1) elementach, $i=1,\ldots,n$.

Zatem takich ciągów, czyli w konsekwencji dodatnich dzielników liczby N jest

$$(k_1+1) \cdot (k_2+1) \cdot \ldots \cdot (k_n+1).$$

Zastosujmy otrzymany wynik do liczby 2020.

Ponieważ $N = 2020 = 5 \cdot 404 = 5 \cdot 4 \cdot 101 = 5 \cdot 2^2 \cdot 101$,

więc każdy jej dzielnik jest postaci $5^{l_1} \cdot 2^{l_2} \cdot 101^{l_3}$,

gdzie $l_1 \in \{0, 1\}$,

$l_2 \in \{0, 1, 2\}$,

$l_3 \in \{0, 1\}$.

Stąd widzimy, że liczba 2020 ma $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ dzielników dodatnich.