Rozdział 3

Podstawowe modele kombinatoryczne

3.1 Permutacje, wariacje i kombinacje z powtórzeniami i bez powtórzeń

Rozważmy n-elementowy zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Jeżeli elementy zbioru A ustawimy w określonej kolejności, np. $a_7, a_5, \ldots, a_n, a_1$, to otrzymamy **ciąg** n-elementowy oznaczany jako $(a_7, a_5, \ldots, a_n, a_1)$. Widzimy, że dla określenia zbioru wystarczy podać jego elementy. Jeżeli istotna jest także kolejność ich występowania, to każde uporządkowanie wyznacza inny ciąg.

1. Zbiór A można uporządkować na

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{3.1}$$

sposobów. Innymi słowy, ze zbioru A można utworzyć $n!$ ciągów n-elementowych zwanych **permutacjami** elementów zbioru A.

Rozważymy teraz dwa sposoby losowania elementów zbioru A: losowanie bez zwracania wylosowanego elementu oraz losowanie ze zwracaniem wylosowanego elementu. Przy obu regułach losowania w pierwszym przypadku uwzględniamy kolejność losowanych elementów, w drugim natomiast jest ona dla nas nieistotna.

2. Losując k razy ($k \leq n$) elementy ze zbioru A bez zwracania, otrzymujemy

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) \tag{3.2}$$

różnych ciągów zwanych k-elementowymi **wariacjami bez powtórzeń**
oraz

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{3.3}$$

różnych zbiorów zwanych k-elementowymi **kombinacjami** (bez powtórzeń).

3. Losując k razy (k dowolne) elementy ze zbioru A ze zwracaniem, otrzymujemy

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ razy}} = n^k \tag{3.4}$$

różnych ciągów zwanych k-elementowymi **wariacjami z powtórzeniami**
oraz

$$\binom{n+k-1}{k} \tag{3.5}$$

różnych źbiorówźwanych k-elementowymi **kombinacjami z powtórzeniami** .
Zauważmy, że, jak wskazuje nazwa otrzymanych zgodnie z tą regułą losowania ciągów i źbiorów", mogą one zawierać powtarzające się wielokrotnie elementy zbioru A.

Rozważmy jeszcze uogólnienie modelu z punktu 1.
4. Zbiór A, który dzieli się na k podzbiorów takich, że
1. składa się z m_1 nierozróżnialnych elementów,
2. składa się z m_2 nierozróżnialnych elementów,
...
k. składa się z m_k nierozróżnialnych elementów,
przy czym

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n,$$

można uporządkować na

$$\binom{n}{m_1} \cdot \binom{n-m_1}{m_2} \cdot \binom{n-m_1-m_2}{m_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}{m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!} \tag{3.6}$$

sposobów. Wzór (3.6) przedstawia liczbę **permutacji z powtórzeniami** zbioru A.

Przykład 3.1.

Niech $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ i $k = 2$.
Sprawdźmy dla tych danych prawdziwość wzorów (3.1) – (3.6).

1. Zbiór A można uporządkować na

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

sposobów, ponieważ jako pierwszy może wystąpić każdy z 4 elementów zbioru A, jako drugi każdy z 3 pozostałych, jako trzeci każdy z 2 pozostałych, a czwarte miejsce musi być zajęte przez jedyny niewystępujący dotychczas element. Fundamentalna zasada mnożenia (2.5) daje więc powyższy wynik.

2. Losując ze zbioru A bez zwracania 2 elementy, otrzymamy

$$4 \cdot 3 = 12$$

różnych ciągów 2-elementowych (uzasadnienie jak wyżej) oraz

$$\frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$$

różnych zbiorów 2-elementowych, ponieważ na przykład, dwa ciągi (a_1, a_2) oraz (a_2, a_1) "przechodzą" w jeden tylko zbiór $\{a_1, a_2\}$, gdy przestaje nas interesować kolejność tworzących je elementów a_1 oraz a_2.

3. Losując ze zbioru A ze zwracaniem 2 elementy, otrzymamy

$$4 \cdot 4 = 16$$

różnych ciągów 2-elementowych, ponieważ na obu miejscach w ciągu może wystąpić każdy z 4 elementów zbioru A oraz 10 następujących zbiorów 2-elementowych:

$$\{a_1, a_1\}, \{a_2, a_2\}, \{a_3, a_3\}, \{a_4, a_4\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}.$$

Nie jest przypadkiem, że

$$\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$

4. Podzielmy elementy zbioru A na 3 podzbiory A_1, A_2, A_3 o liczebności 1, 1 oraz 2 odpowiednio, tak, by elementy w zbiorze A_3 były nierozróżnialne. Uczynimy to, wybierając 1 element spośród 4 tworząc podzbiór A_1, następnie 1 element spośród 3 pozostałych tworząc A_2 i traktując potem jako jednakowe pozostałe dwa elementy – będą one tworzyć podzbiór A_3. Na mocy (2.5') powyższą procedurę można przeprowadzić na

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} = \frac{4!}{1!1!2!} = 12$$

sposobów. Powyższe wyrażenie można także interpretować jako liczbę wszystkich uporządkowań 4-elementowego zbioru A utworzonego z trzech podzbiorów zawierających odpowiednio 1, 1 oraz 2 jednakowe, ale różne od pozostałych elementy.

Przykład pozwala widzieć prawdziwość wzorów (3.1) – (3.6) poza wyjątkiem relacji (3.5). Uzupełnimy teraz tę lukę.

Dowód wzoru (3.5). Zauważmy, że otrzymanie zbioru o k elementach mogących występować wielokrotnie, a pochodzących ze zbioru n-elementowego jest równoznaczne z losowym rozmieszczeniem k nierozróżnialnych kul w n ponumerowanych komórkach (umawiamy się, że wylosowanie elementu a_1 ze zbioru A oznacza włożenie kuli do 1. komórki, elementu a_2 – do 2. komórki, ... , elementu a_n – do n. komórki). Każde rozmieszczenie można z kolei przedstawić graficznie jako kombinację kresek i kropek np. $\cdots|\cdot|\cdots||\cdots$ oznaczających odpowiednio kule (kropki) i komórki (kreski na oznaczenie ściany komórki). W myśl tej konwencji, wynik losowania $\{a_1, a_1\}$ w przykładzie 3.1 będzie zapisany jako $\cdot\cdot\,|||$, wynik $\{a_2, a_3\}$ jako $|\cdot|\cdot|$, a wynik $\{a_4, a_4\}$ jako $|||\cdot\cdot$. Wracając do ogólnego przypadku, razem mamy więc k (liczba kropek) i $n-1$ (liczba kresek) znaków. Jedno rozmieszczenie jest jednoznacznie ustalone przez wybranie k spośród wszystkich $n-1+k$ znaków. Zgodnie ze wzorem (3.3) wszystkich wyborów mamy

$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Wzór (3.5) jest zatem udowodniony.

Przeanalizujemy teraz kilka zadań kombinatorycznych, do rozwiązania których zastosujemy wzory (2.5) i (3.1) – (3.6).

Przykład 3.2.

a) N osób, wśród których są A i B, można ustawić w kolejce na N! sposobów (wzór (3.1)). Ustawień, w których między A i B znajdują się dokładnie 2 osoby (zakładamy, że $N \geq 4$ oraz A występuje przed B) jest

$$(N-3)\cdot\binom{N-2}{2}\cdot 2!\cdot(N-2-2)! = (N-3)\cdot\frac{(N-2)!}{2!(N-4)!}\cdot 2!\cdot(N-4)! = (N-2)!\cdot(N-3).$$

Rzeczywiście, w każdym takim ustawieniu musi wystąpić śegment” składający się z osoby A, dwóch innych osób i osoby B. Zatem A może znajdować się w kolejce na każdym miejscu o numerze od 1 do $N-3$ włącznie. Gdy ustalimy już pozycję dla A, wybieramy na $\binom{N-2}{2}\cdot 2!$ sposobów 2 osoby mające stać między A i B. Ich kolejność jest istotna, więc stosujemy wzór (3.2). Pozostałe $N-4$ osoby ustawiamy na pozostałych $N-4$ miejscach na $(N-4)!$ sposobów (wzór (3.1)).

b) Tworzymy liczby z wszystkich cyfr liczby 1234. Zgodnie z (3.1) takich liczb jest $4! = 24$. Obliczmy, ile wynosi suma tych liczb.
Każda z nich jest postaci $a_i \cdot 1000 + b_i \cdot 100 + c_i \cdot 10 + d_i, i \in I = \{1, 2, \ldots, 24\}$.
Zauważmy, że $a_i = 1$ dla 6 wskaźników ze zbioru I, bo liczb postaci $1bcd$, gdzie $b, c, d \in \{2, 3, 4\}$ jest $3! = 6$. Tak samo $a_i = 2$ dla 6 innych wskaźników ze zbioru I, $a_i = 3$ dla 6 wskaźników ze zbioru I oraz $a_i = 4$ dla 6 wskaźników ze zbioru I.

Analogicznie, $b_i = 1$ dla 6 wskaźników ze zbioru I, bo liczb postaci $a1cd$, gdzie $a, c, d \in \{2, 3, 4\}$ jest $3! = 6.$, itd. Stąd

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in I} c_i = \sum_{i \in I} d_i = 6(1 + 2 + 3 + 4) = 60.$$

Zatem szukana suma wynosi

$$\sum_{i \in I} (a_i \cdot 1000 + b_i \cdot 100 + c_i \cdot 10 + d_i) = 1000 \sum_{i \in I} a_i + 100 \sum_{i \in I} b_i + 10 \sum_{i \in I} c_i + \sum_{i \in I} d_i = 60 \cdot 1111 = 66\,660.$$

c) Różnowartościowych funkcji o dziedzinie $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ oraz zbiorze wartości $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, przy czym $k \leq n$, jest na mocy (3.2)

$$n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - (k - 1)),$$

ponieważ pierwszemu argumentowi z D możemy przyporządkować każdy z n elementów zbioru V, drugiemu – o 1 mniej, czyli $n - 1$, itd.

d) Przyjmując, że alfabet ma 26 liter, możemy zgodnie z (3.4) ułożyć

– 26^2 różnych inicjałów 2-literowych;

– 26^3 różnych inicjałów 3-literowych.

Aby przy użyciu 3-literowych inicjałów można było odróżnić 1 mln osób, alfabet musiałby mieć $n = 100$ liter. Rzeczywiście, $n^3 = 1\,000\,000$ dla $n = 100$.

e) Należy umieścić n kul w n ponumerowanych komórkach tak, by dokładnie jedna pozostała pusta.

Jeżli kul nie rozróżniamy, możliwości rozmieszczeń jest $n(n - 1)$, ponieważ każdemu wyborowi komórki, która ma pozostać pusta, a może nią być każda z n komórek, odpowiada wybór jednej z pozostałych $n - 1$ komórek, która będzie zawierać 2 kule. Jeśli natomiast kule rozróżniamy, takich rozmieszczeń będzie

$$n \cdot (n - 1) \cdot \binom{n}{2} \cdot (n - 2)! = n(n - 1)\frac{n!}{2}.$$

Każdemu bowiem opisanemu wyżej wyborowi komórek odpowiada jeszcze wybór 2 spośród n kul, które będą umieszczone razem (wzór (3.3)) oraz każde z $(n - 2)!$ ustawień pozostałych $n - 2$ kul w $n - 2$ komórkach (wzór (3.1)).

f) Jeżli z kolei rozmieszczamy k rozróżnialnych kul w n ponumerowanych komórkach tak, by w pierwszej znalazło się dokładnie $m\,(m \leq k)$ kul, to mamy do wyboru

$$\binom{k}{m} \cdot (n - 1)^{k-m}$$

możliwości. Ustalamy bowiem naprzód na $\binom{k}{m}$ sposobów m kul do pierwszej komórki, a resztę tzn. $k - m$ kul rozmieszczamy dowolnie w pozostałych $n - 1$ komórkach.

g) Dziesięciu pasażerów (zakładamy, że są nierozróżnialni) może opuścić windę jadącą od pierwszego do siódmego piętra na

$$\binom{7+10-1}{10} = \binom{16}{10} = 8008$$

sposobów. Rzeczywiście, jeżli posłużymy się modelem o $k = 10$ kulach, które należy rozmieścić w $n = 7$ komórkach, to zastosowanie wzoru (3.5) daje powyższą odpowiedź. Jeżeli dodatkowo wymagamy, aby na każdym piętrze wysiadł przynajmniej jeden pasażer, to takich rozmieszczeń będzie

$$\binom{10-1}{7-1} = \binom{9}{6} = 84.$$

Stosując bowiem w dalszym ciągu model rozmieszczania k nierozróżnialnych kul w n komórkach, widzimy, że w omawianym przypadku każde rozmieszczenie jest równoważne z wyborem $n-1$ miejsc (dla kresek – ścianek komórek) spośród $k-1$ miejsc (tyle jest miejsc między k kropkami – kulami).
h) Różnych rozwiązać równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych jest na mocy wzoru (3.5)

$$\binom{4+15-1}{15} = \binom{18}{15} = 816.$$

Zmienne traktujemy jako $n = 4$ komórki, które należy zapełnić łącznie $k = 15$ jednakowymi kulami – jedynkami.
Jeżeli chcemy, by rozwiązania były liczbami naturalnymi (bez zera), stosujemy drugi model omówiony w podpunkcie (g) otrzymując

$$\binom{15-1}{4-1} = \binom{14}{3} = 364.$$

Warunek ten oznacza bowiem, że żadna komórka nie może pozostać pusta.
i) Ze słowa METODYKA można utworzyć 8! różnych śłów" (tzn. ciągów literowych) 8-literowych (wzór (3.1)).
Ze słowa REPRYWATYZACJA natomiast utworzymy zgodnie ze wzorem (3.6)

$$\frac{14!}{3!2!2!\underbrace{1!\ldots1!}_{7\text{ razy}}} = 3\,632\,428\,800$$

śłów" 14-literowych, ponieważ litera A występuje 3 razy, R – 2 razy, Y – 2 razy, a pozostałe litery tworzą już 1-elementowe "podzbiory" zbioru liter rozpatrywanego słowa.

j) Wracając do konfiguracji pasażerów, załóżmy, że siedem (rozróżnialnych tym razem) osób jedzie windą w ośmiopiętrowym budynku, przy czym trzy z nich wysiadają na pierwszym piętrze, dwie – na drugim oraz po jednej na trzecim i czwartym. Wszystkich takich możliwości jest na mocy wzoru (3.6)

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420,$$

ponieważ wybieramy naprzód 3 osoby do pierwszego piętra, potem z pozostałych czterech 2 osoby mające wysiąść na drugim piętrze, itd.

Jeśli natomiast pytamy o liczbę możliwości wysiadania pasażerów tak, by na *pewnym* piętrze wysiadły 3 osoby, na *innym* – 2 osoby i na *dwóch z pozostałych* po 1 osobie, to odpowiedzią jest

$$\binom{8}{1}\binom{7}{1}\binom{6}{2}\cdot\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{8!}{1!1!2!4!}\cdot\frac{7!}{3!2!1!1!} = 840\cdot 420 = 352\,800.$$

Każdemu bowiem rozdzieleniu osób omówionemu wyżej odpowiada jeden z możliwych podziałów pięter na trzy podzbiory określone liczbą wysiadających pasażerów.

Uwaga. Do omawianych wyżej modeli kombinatorycznych: kombinacji oraz wariacji z powtórzniami i bez powtórzeń można dojść również rozważając rozmieszczenia kul w komórkach, jak to pokazuje poniższa tabela.

Liczba rozmieszczeń k kul w n ponumerowanych komórkach		
Kule Zajętości	kule rozróżnialne $\omega = (x_1, x_2 ..., x_k), x_i \in \{1, .., n\}$	kule jednakowe $\omega = (x_1, ..., x_n),\ \sum_{i=1}^{n} x_i = k$
0 lub 1 kul w komórce	$1 \le k \le n$ $n(n-1)\cdot ... \cdot (n-(k-1))$ x_i - różne k-elementowe wariacje bez powtórzeń	$1 \le k \le n$ $\binom{n}{k}$ $x_i \in \{0, 1\}$ k-elementowe kombinacje bez powtórzeń
dowolna liczba kul w komórce	k dowolne $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^k$ $x_i \in \{1, ..., n\}$ k-elementowe wariacje z powtórzeniami	k dowolne $\binom{n+k-1}{k}$ $x_i \in \{0, 1, ..., k\}$ k-elementowe kombinacje z powtórzeniami
	x_i - numer komórki z i. kulą	x_i - liczba kul w i. komórce

3.2 Współczynniki Newtona i związane z nimi tożsamości kombinatoryczne

Oto kilka najważniejszych wzorów związanych z symbolami Newtona:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{3.7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n,\ a, b \in \mathcal{R} \tag{3.8}$$

Powyższy wzór jest znany jako **wzór dwumianowy Newtona**.
W szczególności, biorąc w nim $a = b = 1$ otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \tag{3.9}$$

a przyjmując $a = -b = -1$ mamy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0. \tag{3.10}$$

Uwaga. Wzór (3.9) przedstawia liczbę wszystkich podzbiorów zbioru $n-$ elementowego (łącznie ze zbiorem pustym i całym tym zbiorem).

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^{k+1}}{k+1} = \frac{(a+1)^{n+1} - 1}{n+1},\ a \in \mathcal{R} \tag{3.11}$$

W szczególności, biorąc $a = -1$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{n}{n+1}. \tag{3.12}$$

Pierwszy z wymienionych wyżej wzorów udowodnimy za chwilę, drugi jest znany z kursu analizy, a dwa kolejne wynikają z niego natychmiast. Pozostaje więc podać **dowód** wzoru (3.11). Korzystając z wynikającej od razu z definicji symbolu Newtona równości

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{n+1}$$

oraz wzoru (3.8) mamy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \frac{a^{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n+1}{l} a^l 1^{n+1-l} = \frac{1}{n+1}((a+1)^{n+1} - 1),$$

czyli wzór (3.11)

Wracając do wzoru (3.7) udowodnimy go, nadając każdej z jego stron odpowiednią interpretację kombinatoryczną.

Rozważmy mianowicie zbiór $(n+1)$-elementowy (np. n różnych liter i jedna cyfra) oraz wszystkie $(k+1)$-elementowe jego podzbiory. Na mocy (3.3) wiemy, że jest ich tyle, ile wskazuje prawa strona (P) wzoru (3.7). Zauważmy jednak dodatkowo, że możemy wśród nich wyróżnić dwa rodzaje: te, które zawierają wyróżniony element, a jest ich $\binom{n}{k}$ (do tego wyróżnionego dobieramy jeszcze k spośród n innych) oraz te, w kórych ten wyróżniony element nie występuje. Tych z kolei jest $\binom{n}{k+1}$ (wszystkie $k+1$ elementy wybieramy spośród n – bez wyróżnionego). Z reguły dodawania (2.1) mamy lewą stronę (L) wzoru (3.7), co kończy jego dowód.

Stosując tę samą metodę, udowodnimy jeszcze dwie następujące tożsamości:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \tag{3.13}$$

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}, \quad l \leq min(n,m). \tag{3.14}$$

Co do (3.13), każda ze stron pokazuje inny sposób wykonania tego samego zadania, a mianowicie wybrania spośród n osób wszystkich k-osobowych komitetów, $k = 1,\ldots,n$, z wyróżnioną jedną osobą np. przewodniczącym. Według lewej strony (L) ustalamy najpierw liczebność komitetu k, potem na $\binom{n}{k}$ sposobów wybieramy jego członków, na koniec spośród nich wybieramy przewodniczącego (na k sposobów). Według strony prawej (P) wybieramy naprzód spośród wszystkich n osób przewodniczącego (na n sposobów), a potem spośród pozostałych $n-1$ osób, z których każda ma 2 możliwości: przyłączyć się, bądź nie, dobieramy mu członków komitetu. Postać zarówno prawej, jak i lewej strony wynika z fundamentalnej reguły mnożenia (2.5).

Wzór (3.14) także da się uzasadnić rozpatrując tworzenie komitetów. Tym razem jednak ich liczebność l będzie ustalona, a wyboru będziemy dokonywać spośród n pań oraz m panów. Z jednej więc strony (P) wiadomo, że takich komitetów jest $\binom{m+n}{l}$. Z drugiej, co pokazuje strona (L), możemy je wszystkie pogrupować ze względu na liczbę k zasiadających w nich pań, $k = 0,1,\ldots,l, \quad l \leq min(n,m)$. Przy ustalonym k, komitetów l- osobowych możemy utworzyć $\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}$. Rzeczywiście każdej grupie k pań odpowiada dowolna dopełniająca do liczby l grupa $l-k$ panów. Stosując znów regułę mnożenia (2.5) mamy powyższy wynik.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na następujący szczególny przypadek wzoru (3.14):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \tag{3.15}$$

który otrzymujemy od razu z (3.14) kładąc $m = l = n$. Rzeczywiście, ponieważ

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$

więc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{n+n}{n}.$$