Rozdział 4

Podziały

4.1 Podziały zbiorów

Na początek rozważmy następujący

Przykład 4.1.

a) Zbiór n-elementowy można podzielić między trzy osoby A,B,C na 3^n sposobów. Każdy bowiem podział można przedstawić jako wektor $(x_1, \dots x_n)$, gdzie $x_i \in \{A, B, C\}$.

b) Podziałów takich, że każda osoba coś dostanie jest

$$3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1),$$

ponieważ musimy wykluczyć przypadek, gdy elementy zbioru podzielone zostaną między dowolne dwie osoby (A i B, A i C, B i C) oraz, gdy wszystko dostanie jedna z trzech osób A,B,C.

c) Natomiast liczba podziałów w przypadku dzielenia tego zbioru na trzy niepuste części wynosi

$$\frac{1}{3!} \cdot 3(3^{n-1} - 2^n + 1) = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1)$$

d) Jeżeli liczebność zbioru, który dzielimy jest liczbą podzielną przez trzy ($n = 3k$), to l podziałów takich, że każdej osobie przypadnie dokładnie po k elementów jest

$$\binom{3k}{k}\binom{2k}{k}\binom{k}{k} = \frac{(3k)!}{k!k!k!},$$

a podziałów na trzy równe części jest $\frac{(3k)!}{3!(k!)^3}$.

Ogólnie:

Niech B_n będzie liczbą wszystkich podziałów zbioru n-elementowego na rozłączne i niepuste podzbiory, których kolejność jest **nieistotna**. Dla ustalenia uwagi i prostszego zapisu przyjmiemy, że rozważany n-elementowy zbiór to zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$.
Pokażemy, że ciąg $\{B_n,\ n = 0, 1, \dots\}$, który nazywamy **liczbami Bella**, spełnia następujące równanie rekurencyjne:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l, \ \ B_0 = 1. \tag{4.1}$$

Dowód. W każdym podziale bierzemy pod uwagę zbiór, który zawiera element $n + 1$. Może on mieć jeszcze k innych elementów, gdzie $0 \le k \le n$. Wybiera się je na $\binom{n}{k}$ sposobów, a pozostałe $n - k$ elementy są dzielone na podzbiory na B_{n-k} sposobów.

Przykład 4.2.

Obliczmy według powyższego wzoru liczbę podziałów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Mamy

$$B_1 = B_0 = 1,\ B_2 = \sum_{l=0}^{1} \binom{1}{l} B_l = B_0 + B_1 = 2,\ B_3 = \sum_{l=0}^{2} \binom{2}{l} B_l = B_0 + 2B_1 + B_2 = 5,$$

$$B_4 = \sum_{l=0}^{3} \binom{3}{l} B_l = B_0 + 3B_1 + 3B_2 + B_3 = 15.$$

Liczby Bella można też określić następująco:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k), \tag{4.2}$$

gdzie $S(n, k)$ oznacza liczbę podziałów n-elementowego zbioru na k niepustych podzbiorów, których kolejność jest **nieistotna**. Przyjmujemy, że

$$S(n, k) = \begin{cases} 0, & n < k \\ 0, & k = 0,\, n > 0 \\ 1, & k = 0,\, n = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Liczby $S(n, k)$ noszą nazwę **liczb Stirlinga II rodzaju**.

Przykład 4.3.

Wyliczmy jeszcze raz B_4 korzystając tym razem z (4.2). Mamy kolejno:

$$S(4, 0) = 0, \quad S(4, 1) = S(4, 4) = 1, \quad S(4, 2) = 7, \quad S(4, 3) = 6,$$

ponieważ można wyznaczyć 3 podziały na 2 dwuelementowe podzbiory i 4 podziały na 1 podzbiór trójelementowy i 1 jednoelementowy oraz 6 podziałów, w których wystąpi 1 podzbiór dwuelementowy i 2 jednoelementowe. Sumując otrzymujemy, jak poprzednio, że $B_4 = 15$.

Uwaga. Ciąg $\{\, S(n,k),\ n = 1,2,...;\ k = 1,2,...,n\,\}$ spełnia równanie rekurencyjne postaci:

$$S(n,k) \;=\; S(n-1,k-1) + kS(n-1,k). \tag{4.4}$$

Dowód. We wszystkich podziałach wyróżniamy te, które zawierają jednoelementowy podzbiór $\{1\}$ oraz te, które go nie zawierają. Tych pierwszych jest $S(n-1,k)$, bo mamy do podziału na $k-1$ podzbiorów zbiór $(n-1)$-elementowy. Podziały w drugiej grupie są tworzone w następująco: zbiór $\{2,3,...,n\}$ dzielimy na k niepustych podzbiorów, co można zrobić na $S(n-1,k)$ sposobów i do jednego z nich, a więc na k sposobów, dołączamy $\{1\}$.

Zauważmy, że w Przykładzie 4.1 c) wyliczyliśmy jawną postać $S(n,3)$ dla $n = 1,2,...$ Poniżej pokażemy, że otrzymane wyrażenie spełnia wzór rekurencyjny (4.4) dla $k = 3$:

$$\begin{aligned} S(n,3) = S(n-1,2) + 3S(n-1,3) \;&=\; \frac{1}{2!}(2^{n-1}-2) + 3(\frac{1}{3!}(3^{n-1} - 3\cdot 2^{n-1} + 3)) \\ &= \frac{1}{3!}(3^n - 3\cdot 2\cdot 2^{n-1} + 3) = \frac{1}{3!}(3^n - 3\cdot 2^n + 3). \end{aligned}$$

Innym przypadkiem, w którym łatwo wyznacza się jawny wzór na $S(n,k)$ jest $k = n-2$. Otrzmujemy wtedy mianowicie

$$S(n,k) \;=\; S(n,n-2) \;=\; 3\binom{n}{4} + \binom{n}{3}.$$

Dowód. Wszystkie podziały zbioru $\{1,2,...,n\}$ na $n-2$ niepuste podzbiory dzielimy na dwie grupy: te, w których występują $n-3$ podzbiory jednoelementowe i jeden podzbiór trójelementowy oraz te, w których występują $n-4$ podzbiory jednoelementowe i dwa dwuelementowe. Każdy podział z pierwszej grupy jest jednoznacznie określony przez wybór trzech elementów tworzących jeden podzbiór, a więc w tej grupie jest $\binom{n}{3}$ podziałów. Aby wyznaczyć podział z drugiej grupy należy ustalić cztery elementy tworzące dwa dwulementowe podzbiory. Taki podział można wyznaczyć na $\binom{n}{4}$ sposobów. Następnie te podzbiory należy podzielić na dwuelementowe podzbiory. To można zrobić na trzy sposoby: np. dla zbioru $1,2,3,4$ mamy następujące podziały:

$$\{1,2,3,4\} = \begin{cases} \{1,2\} \cup \{3,4\} \\ \{1,3\} \cup \{2,4\} \\ \{1,4\} \cup \{2,3\} \end{cases}.$$

Uwaga. Ogólnie, dla $n = 1, 2, ...;\ k = 1, 2, ..., n$ zachodzi wzór

$$S(n, k) \;=\; \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^n.$$

Dowód indukcyjny ze względu na n. Stosując wzór rekurencyjny (4.4) mamy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
S(n+1, k) &= S(n, k-1) + kS(n, k) \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{k-1-l} \binom{k-1}{l} l^n + \frac{k}{k!} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^n \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{k-l}(-1) \binom{k-1}{l} l^n + \frac{1}{(k-1)!} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^n \\
&+ \frac{1}{(k-1)!} k^n \overset{(1)}{=} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{k-l}\, l^n \left(\binom{k}{l} - \binom{k-1}{l} \right) \\
&+ \frac{k^n}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{k-l} l^n \binom{k-1}{l-1} + \frac{k^n}{(k-1)!} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k-1}{l-1} l^n \overset{(2)}{=} \frac{1}{(k-1)!k} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^{n+1} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^{n+1},
\end{aligned}$$

gdzie równości oznaczone przez (1) i (2) wynikają z następujących zależności:

(1) $$\binom{k}{l} = \binom{k-1}{l} + \binom{k-1}{l-1},$$

(2) $$\binom{k-1}{l-1} = \frac{l}{k} \binom{k}{l}.$$

4.2 Podziały liczb

Nieuporządkowanym podziałem liczby naturalnej n na k dodatnich składników nazywamy każde przedstawienie liczby n w postaci sumy:

$$n \;=\; a_1 + a_2 + ... + a_k, \quad a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k \geq 1 \tag{4.5}$$

Warunek monotoniczności uniezależnia podział od kolejności składników.
Liczbę wszystkich nieuporządkowanych podziałów liczby n na k dodatnich składników oznaczamy przez $P(n, k)$.

Przykład 4.4.

Dla $n = 7$ i $k = 4$ mamy $P(7, 4) = 3$, ponieważ

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1, \quad 7 = 3 + 2 + 1 + 1, \quad 7 = 2 + 2 + 2 + 1$$

oraz dla $n = 9$ i $k = 4$ mamy $P(9, 4) = 6$, ponieważ

$$9 = 6+1+1+1 = 5+2+1+1 = 4+3+2+1 = 4+2+2+1 = 3+3+2+1 = 3+2+2+2.$$

W ogólnym przypadku nie ma jawnego wzoru na $P(n, k)$. Zachodzi natomiast następujący wzór rekurencyjny:

$$P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k).$$

Dowód. Wszystkie nieuporządkowane podziały liczby n postaci (4.5) dzielimy na te, dla których $a_k = 1$ oraz te, w których $a_k \geq 2$. Tych pierwszych jest $P(n - 1, k - 1)$, ponieważ mamy podzielić na $k - 1$ składników liczbę $n - 1$. Dla tych drugich zauważmy, że warunek (4.5) jest równoważny następującemu:

$$n - k \cdot 1 \; = \; (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + ... + (a_k - 1), \quad a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k \geq 2,$$

czyli

$$n - k \; = \; a_1' + a_2' + ... + a_k', \quad a_1' \geq a_2' \geq ... \geq a_k' \geq 1.$$

Oznacza to, że nieuporządkowanych podziałów liczby n na k składników z $a_k \geq 2$ jest tyle, ile nieuporządkowanych podziałów liczby $n - k$ na k składników, czyli $P(n - k, k)$.

Łatwo także zauważyć, że

- $P(n, k) = 0$ dla $k > n$;
- $P(n, k) = 1$ dla $k = n$;
- $P(n, 1) = 1$;
- $P(n, n - 2) = 2$, ponieważ $n = 3 + 1 \times (n - 3)$ oraz $n = 2 + 2 + 1 \times (n - 4)$;
- $P(n, 2) = [\frac{n}{2}]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, ponieważ
  jeśli $n = 2k$, to $n = (2k - 1) + 1 = (2k - 2) + 2 = \ldots = k + k$,
  jeśli $n = 2k + 1$, to $n = (2k) + 1 = (2k - 1) + 2 = \ldots = (k + 1) + k$.
  W obu zatem przypadkach $P(n, 2) = k = [\frac{2k}{2}] = [\frac{2k+1}{2}]$.

Ponadto prawdziwe są następujące oszacowania $P(n, k)$:

- $P(n,k) \le \binom{n-1}{k-1}$, ponieważ $\binom{n-1}{k-1}$ jest liczbą wszystkich, a nie tylko spełniających warunek (4.5), rozmieszczeń $n \ge k$ kul w k różnych komórkach tak, by żadna nie była pusta;

- $P(n,k) \ge \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}$, ponieważ każdemu nieuporządkowanemu podziałowi liczby n odpowiada co najwyżej $k!$ rozmieszczeń n kul w k komórkach, takich, by żadna nie pozostała pusta.

  Łącząc powyższe nierówności mamy zatem

$$\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \le P(n,k) \le \binom{n-1}{k-1}.$$

Niestety, otrzymane tak oszacowania wielkości $P(n,k)$ nie są zbyt dokładne. Aby się o tym przekonać, przyjmijmy np. $n = 8$ oraz $k = 5$ i wyliczmy dolne i górne ograniczenie:

$$\frac{1}{5!}\binom{7}{4} = \frac{7}{24}, \qquad \binom{7}{4} = 35.$$

Dają nam one oszacowanie $P(8,5)$ postaci

$$\frac{7}{24} \le P(8,5) \le 35.$$

Trudno je jednak uznać za zadawalające wiedząc, że $P(8,5) = 3$.