Rozdział 5

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

5.1 Definicje i podstawowe własności

Rozważmy doświadczenie losowe, czyli takie, którego poszczególne wyniki zależą od pewnego mechanizmu losowego. Za typowe doświadczenia losowe zwykło się uważać rzuty monety lub kostki, rozdawanie kart z potasowanej talii, losowanie kul z urny, loterię, grę w ruletkę, trafianie do celu na tarczy strzelniczej.
Oznaczmy przez Ω zbiór możliwych wyników w doświadczeniu losowym. Będziemy je nazywać **zdarzeniami elementarnymi**, Ω – **przestrzenią zdarzeń (elementarnych)**. Podzbiór A przestrzeni zdarzeń Ω nazywamy **zdarzeniem**, a jego elementy – **zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu** A. Zbiór pusty $\emptyset$ nosi nazwę **zdarzenia niemożliwego**, dopełnienie A' zbioru A zdarzeń elementarnych nazywamy **zdarzeniem przeciwnym do** A. Iloczyn zdarzeń $A \cap B$ odpowiada **jednoczesnemu zajściu zdarzeń** A **i** B, a suma zdarzeń A i B – zajściu **co najmniej jednego z nich**. Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zdarzenia A **i** B **wykluczają się**. Zauważmy, że działania dodawania, mnożenia i brania dopełnień na zdarzeniach podlegają prawom (1.1) – (1.8).

Pojęcie prawdopodobieństwa wprowadzimy naprzód dla skończonej przestrzeni zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Definicja 5. 1. (Prawdopodobieństwa) Funkcję P przyporządkowującą każdemu zdarzeniu elementarnemu ω_i wartość $P(\omega_i),\ i = 1, \ldots, n$, taką, że

$$P(\omega_i) \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1 \tag{5.1}$$

nazywamy **prawdopodobieństwem dyskretnym skończonym**.

Dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ prawdopodobieństwo określamy jako

$$P(A) = \sum_{\{i\colon \omega_i \in A\}} P(\omega_i). \tag{5.2}$$

W szczególności, jeśli przyjmiemy $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, to powyższy wzór przyjmie postać

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{5.3}$$

znaną jako **klasyczna definicja prawdopodobieństwa**.

Zauważmy, że prawdopodobieństwo dane wzorem (5.2) ma następujące własności:
W1. jest wielkością nieujemną,
W2. prawdopodobieństwo sumy skończonej liczby zdarzeń parami wykluczających się jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń,
W3. prawdopodobieństwo przestrzeni zdarzeń wynosi 1.
Rozważymy teraz dwa przykłady prawdopodobieństwa dyskretnego skończonego.

Przykład 5. 1.

1. Przy rzucie trzech kostek: białej, zielonej i brązowej zdarzeniem elementarnym jest 3-elementowy ciąg, którego pierwszy wyraz oznacza wynik na kostce białej, drugi – na zielonej, a trzeci – na brązowej. Przestrzeń zdarzeń możemy więc zapisać w postaci

   $$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3) : \ x_i = 1, \ldots, 6, \ i = 1, 2, 3\}$$

   Znajdźmy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma "wyrzuconych" oczek wynosi co najmniej 17.
   Zdarzenie A opiszemy jako

   $$A = \{\omega \in \Omega : \ x_1 + x_2 + x_3 \geq 17\}.$$

   Jeśli wszystkie kostki są symetryczne, przypisanie każdemu wynikowi (zdarzeniu elementarnemu) jednakowego prawdopodobieństwa jest uzasadnione. Możemy więc zastosować wzór (5.3). Na mocy (1.13) widzimy, że $|\Omega| = 6^3$. Dla obliczenia liczebności zdarzenia A, zauważmy, że tworzą go następujące zdarzenia elementarne: (6,6,6) oraz (5,6,6), (6,5,6), (6,6,5), a zatem $|A| = 4$. Zgodnie więc z podaną definicją

   $$P(A) = \frac{4}{6^3} = \frac{1}{54}.$$

2. W totolotku wybieramy 6 liczb spośród $\{1, 2, \ldots, 49\}$. Zyskujemy udział w pierwszej nagrodzie (oznaczmy to zdarzenie przez A), jeśli wytypujemy wszystkie liczby (jest ich

także sześć) otrzymane w publicznym losowaniu. Obliczmy prawdopodobieństwo tego zdarzenia.
Zgodnie z (3.3) mamy $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$ oraz $|A| = 1$. Stąd na mocy (5.3)

$$P(A) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 0.0000000715.$$

3. Między troje dzieci dzielimy losowo dwanaście zabawek. Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia A, że każde z nich otrzyma cztery zabawki.
Przestrzeń zdarzeń związaną z tym doświadczeniem możemy zapisać w postaci

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_{12}) : \; x_i = 1, 2, 3, \; i = 1, 2, \ldots, 12\}.$$

Jej liczność na mocy wzoru (3.4) wynosi $|\Omega| = 3^{12} = 531\,441$, natomiast z (3.6) widzimy, że $|A| = \frac{12!}{4!4!4!}$, skąd

$$P(A) = \frac{12!}{(4!)^3 3^{12}} = 0.065.$$

Przykład 5. 2. Przy rzucie dwóch nierozróżnialnych kostek zdarzeniem elementarnym jest 2-elementowy zbiór. Przestrzeń zdarzeń tego doświadczenia losowego przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega = \{x_1, x_2\} : \; x_i = 1, \ldots, 6, \; i = 1, 2\} \\ &= \{\{1,1\}, \{2,2\}, \{3,3\}, \{4,4\}, \{5,5\}, \{6,6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \\ &\quad \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}\}.\end{aligned}$$

Tak więc $|\Omega| = 21$. Znajdźmy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że mniejszy z wyników wynosi co najmniej 5, czyli zdarzenia postaci

$$A = \{\omega \in \Omega : \; \min\{x_1, x_2\} \geq 5\}.$$

Wydaje się, że w tym doświadczeniu losowym wyniki nie są jednakowo prawdopodobne (możemy się spodziewać, że np. wynik $\{1,2\}$ pojawi się częściej niż $\{1,1\}$) i posługiwanie się wzorem (5.3) jest nieuzasadnione. W celu określenia prawdopodobieństwa na przestrzeni Ω zdefiniujemy je naprzód dla poszczególnych zdarzeń elementarnych w następujący sposób:

Tab. 1.

ω_i	$\{1,1\}$	$\ldots$	$\{6,6\}$	$\{1,2\}$	$\ldots$	$\{1,6\}$	$\{2,3\}$	$\ldots$	$\{2,6\}$	$\ldots$	$\{5,6\}$
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{36}$	$\ldots$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\ldots$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\ldots$	$\frac{2}{36}$	$\ldots$	$\frac{2}{36}$

Tak zadane prawdopodobieństwo spełnia warunki (5.1), ponieważ

$$P(\omega_i) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 21 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{21} P(\omega_i) = 6 \cdot \frac{1}{36} + 15 \cdot \frac{2}{36} = 1.$$

Rozważane zdarzenie A tworzą następujące zdarzenia elementarne: $\{5, 5\}, \{6, 6\}$ oraz $\{5, 6\}$, a zatem zgodnie ze wzorem (5.2) jego prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = 2 \cdot \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{9}.$$

Nietrudno zauważyć, że odpowiednio zmodyfikowana definicja 1 może być również stosowana w przypadku przeliczalnej przestrzeni zdarzeń.

Przykład 5. 3. Rozważmy doświadczenie losowe polegające na rzucaniu symetryczną monetą do momentu pierwszego pojawienia się orła. Zdarzeniem elementarnym jest tu więc numer rzutu, w którym po raz pierwszy wypadnie orzeł, a przestrzeń Ω możemy przedstawić jako:

$$\Omega \quad = \quad \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} = \{1, 2, \ldots, \}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzeń elementarnych określamy następująco:

$$P(\omega_i) = P(i) = \frac{1}{2^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

a dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ zgodnie ze wzorem (5.2). Łatwo widać,że

$$P(\omega_i) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Jest to przykład **prawdopodobieństwa dyskretnego nieskończonego**.

Przedstawimy teraz najważniejsze **własności prawdopodobieństwa** wynikające z własności (W1) – (W3).

$$\text{Jeśli} \quad A \subset B, \quad \text{to} \quad P(A) \leq P(B), \qquad (\textbf{monotoniczność}) \tag{5.4}$$

$$P(A') = 1 - P(A), \tag{5.5}$$

$$P(A) \leq 1, \tag{5.6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \tag{5.7}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (\textbf{nierówność Boole'a}). \tag{5.8}$$

Dowody.
(i) Jeśli $A \subset B$, to $B = A \cup (B \setminus A)$, przy czym zdarzenia A oraz $B \setminus A$ wykluczają się. Stąd na mocy własności (W2) $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Biorąc z kolei pod uwagę własność (W1), widzimy, że $P(B \setminus A) \geq 0$, czyli

$$P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geq 0, \tag{5.9}$$

co jest równoważne nierówności (5.4).

(ii) Równość (5.5) wynika bezpośrednio z równości we wzorze (5.9), jeśli przyjmiemy $B = \Omega$ oraz skorzystamy z własności (W3).

(iii) Nierówność (5.6) jest szczególnym przypadkiem (5.4), jeśli przyjmiemy $B = \Omega$ oraz skorzystamy z tego, że $P(\Omega) = 1$.

(iv) Zauważmy, że dla dowolnych zdarzeń A oraz B, ich sumę możemy przedstawić w następujący sposób

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)),$$

przy czym zdarzenia A oraz $B \setminus (A \cap B)$ wykluczają się. Na mocy (W2) i (5.9) zachodzi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

ponieważ $A \cap B \subset B$. Prawdziwa jest zatem równość (5.7).

(v) Nierówność (5.8) udowodnimy metodą indukcji zupełnej.
Dla $n = 2$ wynika ona bezpośrednio z (5.7) oraz tego, że $P(A \cap B) \geq 0$.
Zakładając prawdziwość nierówności dla n, zauważmy, że na mocy prawa łączności dodawania zdarzeń (1.3) i ponownie wzoru (5.7) mamy

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) - P((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}).$$

Prawdziwość tezy dla $n + 1$ otrzymujemy z założenia indukcyjnego oraz tego, że wyrażenie $P((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1})$ jest nieujemne. $\Diamond$

5.2 Niezależność zdarzeń

Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami takimi, że

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{5.10}$$

Równość tę przyjmujemy za definicję **niezależności** dwóch zdarzeń A, B.
Uogólniając, definiujemy niezależność rodziny zdarzeń.

Definicja 5. 2. Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolną rodziną zdarzeń. Jeśli dla każdej skończonej podrodziny $\{A_1, \ldots, A_n\}$ zdarzeń z $\mathcal{C}$ spełniony jest warunek

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), \tag{5.11}$$

to rodzinę tę nazywamy **rodziną zdarzeń niezależnych**.

Należy tutaj podkreślić, że niezależność zdarzeń określona równością (5.11) jest własnością silniejszą niż tzw. **niezależność parami zdarzeń** oznaczająca zachodzenie dla każdej pary z rozpatrywanej rodziny zdarzeń równości (5.10). Pokazuje to także pierwszy z poniższych przykładów.

Przykład 5. 4. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów Ω oraz $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}$, $i = 1, \ldots, 4$. Rozważmy zdarzenia

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad B = \{\omega_2, \omega_3\}, \qquad C = \{\omega_3, \omega_1\}.$$

Rodzina $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$ nie jest rodziną zdarzeń niezależnych, ponieważ

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \tfrac{1}{8},$$

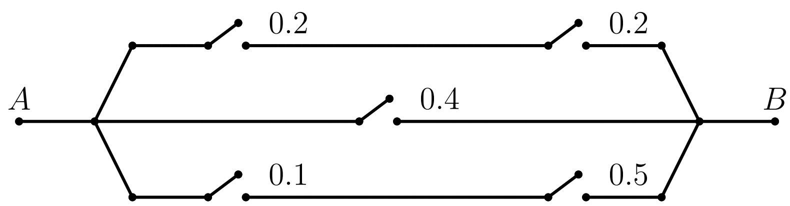
jakkolwiek każda para zdarzeń jest parą zdarzeń niezależnych, na przykład

$$P(A \cap B) = P(\{\omega_2\}) = \tfrac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}.$$

Przykład 5. 5. Jeśli $\{A_1, \ldots, A_k\}$ stanowi rodziną zdarzeń niezależnych, to rodzina zdarzeń przeciwnych $\{A'_1, \ldots, A'_k\}$ także stanowi rodzinę zdarzeń niezależnych.

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Przykład 5. 6. Dwa miejsca A i B połączone są trzema ścieżkami, na których jest pięć mostów zwodzonych usytuowanych według następującego planu (patrz rys. 3.):



Rys. 3.

Mosty podnoszone są niezależnie z prawdopodobieństwami zaznaczonymi na planie. Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia D, że chociaż jedna scieżka jest przejezdna. Oznaczmy przez D_i zdarzenie, że i. ścieżka jest przejezdna. Wtedy na mocy prawa de Morgana

$$P(D) = P(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = 1 - P(D_1' \cap D_2' \cap D_3').$$

Z danych na planie i założonej niezależności mamy

$$\begin{aligned} P(D_1') &= 1 - P(D_1) = 1 - (1 - 0.2)^2 = 0.36, \\ P(D_2') &= 0.4, \\ P(D_3') &= 1 - P(D_3) = 1 - (1 - 0.1) \cdot (1 - 0.5) = 0.55 \end{aligned}$$

i ostatecznie $P(D) = 1 - 0.36 \cdot 0.4 \cdot 0.55 = 0.921$.

Przykład 5. 7. Dwaj gracze rzucają na zmianę dwie kostki. Jeśli gracz A, który rozpoczyna grę, otrzyma sumę oczek równą 6 przed uzyskaniem przez gracza B sumy oczek równej 7, to wygrywa. Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia A oznaczającego wygraną gracza A.
Wprowadźmy zdarzenia B_i polegające na tym, że gra zakończy się w i. rzucie, $i = 1, 3, 5, \ldots$. Ponieważ zdarzenia te wykluczają się, a ich suma jest całą przestrzenią Ω, więc zachodzi równość

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i).$$

Ponadto, zdarzenie $A \cap B_i$ oznacza, że we wszystkich próbach o numerach mniejszych niż i zarówno gracz A, jak i B nie uzyskał wymaganej sumy oczek i dopiero w i. rzucie suma oczek otrzymana przez gracza A wynosi 6. Pamiętając, że wyniki poszczególnych prób są niezależne, mamy zatem

$$P(A \cap B_i) = \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \ldots \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{31 \cdot 30}{36 \cdot 36} \right)^{\frac{i-1}{2}}.$$

Stąd

$$P(A) = \frac{5}{36} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{31 \cdot 30}{36 \cdot 36} \right)^k = \frac{30}{61}.$$

5.3 Ciągi binarne i schemat Bernoullego

5.3.1 Serie w ciągu binarnym

Ciąg binarny złożony z n jedynek i m zer nazywamy $(n,m)-$ciągiem. Takich ciągów jest

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}. \tag{5.12}$$

Na przykład $(0,0,1,1,0,1,1,1)$ jest $(5,3)-$ciągiem.
Serią nazywamy podciąg kolejnych jednakowych elementów. W powyższym przykładzie mamy cztery serie. Zauważmy, że serie zer i jedynek przeplatają się i dlatego ich liczby są jednakowe albo różnią się o jeden.
Przyjmując np. $1 \leq n \leq m$ mamy, że liczba R serii dowolnego $(n,m)-$ciągu ma następujące oszacowanie:

$$2 \leq \ R \ \leq \begin{cases} 2n, & n = m \\ 2n+1, & n \leq n \end{cases} \tag{5.13}$$

Uwaga. Obliczmy, ile jest $(n,m)-$ciągów o ustalonej liczbie R serii.

- Niech $R = 2k$. Jest zatem k serii jedynek oraz k serii zer. Jeżeli potraktujemy serie jako niepuste komórki, to mamy do rozmieszczenia n jedynek w k komórkach oraz m zer także w k innych komórkach tak, by żadna komórka nie pozostała pusta. Jak wiemy, takich rozmieszczeń jest $2\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{m-1}{k-1}$. Czynnik 2 występuje stąd, że zarówno zera jak i jedynki mogą tworzyć pierwszą serię.

- Niech $R = 2k+1$. Wtedy może być $(k+1)$ serii jedynek oraz k serii zer, bądź odwrotnie. Zatem w tym przypadku $(n,m)-$ciągów mamy $\binom{n-1}{k} \cdot \binom{m-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k}$.

Przykład 5. 8. Obliczmy prawdopodobieństwo p tego, że losowy $(n,m)-$ciąg ma parzystą liczbę serii.

I. sposób.

$$\begin{aligned} p = & \frac{2\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-1}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{m-1}{k}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{n-1-k}\binom{m-1}{k}}{\binom{n+m}{n}} \\ = & \frac{2\binom{n-1+m-1}{n-1}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{2\binom{n+m-2}{n-1}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{2mn}{(n+m)(n+m-1)}. \end{aligned}$$

II. sposób.

Zauważmy, że w $(n,m)-$ciągu binarnym o parzystej liczbie serii pierwszy i ostatni element muszą się różnić. Ponieważ możemy je ustalić na dwa sposoby, a pozostałe elementy na $\binom{n+m-2}{n-1}$ sposobów, więc

$$p = \frac{2\binom{n+m-2}{n-1}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{2mn}{(n+m)(n+m-1)}.$$

Ponadto, gdy $n = m$, to $p = \frac{n}{2n-1} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}$.

5.3.2 Ciągi binarne zdominowane

Binarny $(n, m)-$ciąg nazywamy **ciągiem zdominowanym przez zera**, jeśli dla każdego $i = 1, \ldots, n+m$ na pierwszych i miejscach tego ciągu znajduje się co najmniej tyle zer, co jedynek.
Niech $d(n, m)$ oznacza liczbę takich $(n, m)-$ciągów. Można pokazać, że dla $m \le n$

$$d(n, m) = \frac{m+1-n}{m+1}\binom{n+m}{n}. \tag{5.14}$$

Liczby

$$d(n, n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \text{ to } \textbf{liczby Catalana}.$$

Przykład 5. 9. W 20-osobowej kolejce do kina 10 osób ma monetę 5-złotową, a pozostałe osoby banknot 10-złotowy. Zakładając, że w chwili rozpoczęcia sprzedaży w kasie nie ma żadnych pieniędzy, a bilet kosztuje 5 zł, obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia A, że nikt nie będzie czekał na wydanie reszty.
Kolejkę można uważać za ciąg binarny typu $(10, 10)$, gdzie jedynka oznacza osobę z banknotem, a zero osobę z monetą. Wtedy $|A| = d(10, 10)$, a $|\Omega| = \binom{10+10}{10}$. Stąd na mocy (5.14) mamy

$$P(A) = \frac{d(10, 10)}{\binom{20}{10}} = \frac{10+1-10}{10+1} = \frac{1}{11}.$$

5.3.3 Schemat Bernoullego i liczba sukcesów

Schematem Bernoullego nazywamy ciąg niezależnych prób, z których każda może zakończyć się albo **sukcesem**, albo **porażką**, a prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie wynosi p.
Niech dla $k = 0, \ldots, n$ $\quad A_{k,n}$ oznacza, że w serii n prób wystąpiło k sukcesów. Na przykład dla n rzutów kostki, gdy sukces to wypadnięcie trzech oczek, mamy:

$$P(A_{0,n}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \text{oraz} \quad P(A_{n,n}) = \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Niech $B_{i,n}$ oznacza zdarzenie, że i. próba zakończyła się sukcesem. Zatem

$$P(B_{i,n}) = p \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} P(A_{k,n}) &= \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}} P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k} \cap B'_{i_{k+1}} \cap \ldots \cap B'_{i_n}) \\ &= \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Tu sumowanie przebiega po wszystkich $k-$elementowych podzbiorach zbioru indeksów $\{1, \ldots, n\}$.
Uwaga.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1, \quad p^k (1-p)^{n-k} \geq 0,$$

dla $k = 0, ..., n$ i $0 \leq p \leq 1$.

Zatem

$$b(k,n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \;\; 0 \leq k \leq n, \;\; 0 \leq p \leq 1 \tag{5.15}$$

tworzą rozkład prawdopodobieństwa skończony dyskretny, zwany **rozkładem dwumianowym**.

Przykład 5. 10.

$$\begin{aligned} &P(\text{co najmniej trzy razy 'trzy oczka' w } n \text{ rzutach kostki}) \\ &=1 - P(\text{co najwyżej dwa razy 'trzy oczka' w } n \text{ rzutach kostki}) \\ &=1 - [P(A_{2,n}) + P(A_{1,n}) + P(A_{0,n})] \\ &=1 - \left(\binom{n}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \binom{n}{1} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \binom{n}{0} \left(\frac{5}{6}\right)^n \right). \end{aligned}$$

Przykład 5. 11. Przypuśćmy, że awarie poszczególnych silników samolotowych występujące podczas lotu są niezależnymi zdarzeniami losowymi o jednakowym prawdopodobieństwie $1-p$. Załóżmy ponadto, że samolot zdoła bezpiecznie zakończyć lot, gdy sprawnych jest co najmniej połowa jego silników. Ustalmy, dla jakich p samolot czterosilnikowy jest bardziej niezawodny od samolotu dwusilnikowego.
Oznaczmy przez:
IV - zdarzenie, że samolot czterosilnikowy jest niezawodny (przynajmniej połowa silników będzie sprawna)

II - zdarzenie, że samolot dwusilnikowy jest niezawodny.
Naszym zadaniem jest wyznaczyć takie p, że $P(IV) > P(II)$. Mamy kolejno

$$\begin{aligned} P(IV) =& P(A_{2,4}) + P(A_{3,4}) + P(A_{4,4}) = 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4, \\ P(II) =& P(A_{1,2}) + P(A_{2,2}) = 2p(1-p) + p^2. \end{aligned}$$

$P(IV) > P(II)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(p-1)^2(3p-2) > 0$. Tak jest dla $p > \frac{2}{3}$. Zatem należy latać samolotem czterosilnikowym, gdy $p > \frac{2}{3}$, a dwusilnikowym w przeciwnym przypadku.

Schemat Bernoullego i czas czekania na sukces.
Niech T_k oznacza, że w schemacie Bernoullego o prawdopodobieństwie sukcesu p pierwszy sukces wystąpi w k. próbie, $k = 1, 2, \ldots$, a B_i, że i. próba zakończyła się sukcesem, $i = 1, 2, \ldots$. Wtedy

$$P(T_k) = P(B_1' \cap B_2' \cap ... \cap B_{k-1}' \cap B_k) = (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

Uwaga. Dla $0 < p \leq 1$ mamy

$$(1-p)^{k-1} \cdot p \geq 0, \quad k = 1, 2, ..., \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = p \sum_{l=0}^{\infty} (1-p)^l = 1.$$

Zatem

$$p_k = (1-p)^{k-1} \cdot p, \qquad 0 < p \leq 1, \quad k = 1, 2, ... \tag{5.16}$$

tworzą rozkład prawdopodobieństwa przeliczalny dyskretny zwany **rozkładem geometrycznym**.