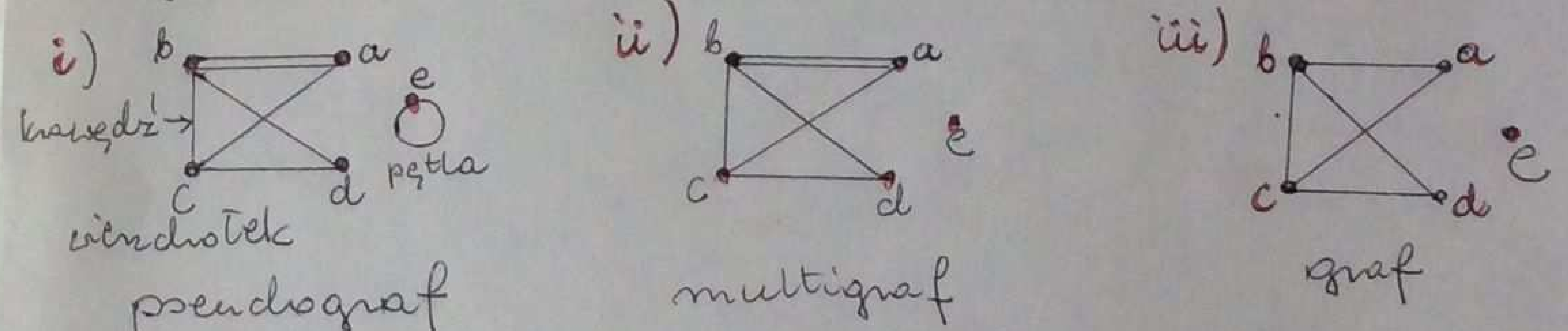
Rozdział 6. Elementy teorii grafów

6.1. Podstawowe pojęcia

Definicja 6.1. Pseudograf G składa się z wierzchołków (tworzących zbiór $V(G)$) oraz krawędzi (tworzących zbiór $E(G)$) takich, że każda krawędź $e \in E(G)$ jest incydentna z dwoma wierzchołkami (być może równymi i wtedy krawędź jest pętlą). Jeśli każda krawędź jest incydentna z dwoma różnymi wierzchołkami, to mamy do czynienia z multigrafem. Dwie krawędzie łączące tę samą parę wierzchołków nazywamy równoległymi (wielokrotnymi). Multigraf bez krawędzi równoległych to graf. Jeśli $|V(G)| < \infty$, to pseudograf (multigraf, graf) nazywamy skończonym.

Przykład 6.1.



Definicja 6.2. Marszrutą (trasą) długości n nazywamy ciąg $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots v_n e_n v_{n+1}$ wierzchołków i krawędzi takich, że każda krawędź jest incydentna z sąsiadującymi z nią wierzchołkami. Jeśli $v_1 = v_{n+1}$, to jest to trasa zamknięta, w przeciwnym razie otwarta.

Trasa mająca wszystkie krawędzie różne, to droga. Droga zamknięta o wszystkich wierzchołkach różnych (poza pierwszym i ostatnim) nosi nazwę cyklu. (Zatem każda pętla tworzy cykl.)

Przykład 6.2. W pseudografie, multigrafie oraz grafie z przykładu 6.1. mamy (zapisując jedynie wierzchołki):

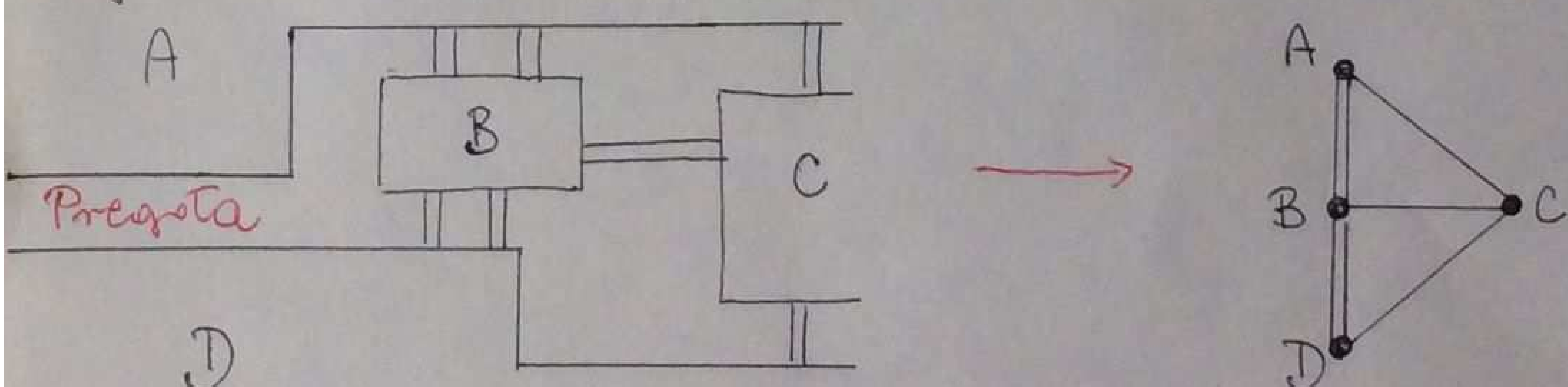
abdb - trasa (marszruta) otwarta,
abdba - -"- -"- zamknięta,
abdcb - droga otwarta
abca - -"- zamknięta, cykl.

Definicja 6.3. Dwa wierzchołki są połączone, jeśli istnieje trasa od jednego do drugiego. W szczególności, każdy wierzchołek jest połączony ze sobą.
Pseudograf nazywamy spójnym, jeśli każde dwa jego wierzchołki są połączone.

Definicja 6.4. Stopniem wierzchołka v (ozn. $d(v)$) jest liczba incydentnych z nim krawędzi. Każda pętla zwiększa stopień wierzchołka o 2.
Przykład 6.3. W pseudografie z przykł. 6.1. mamy:
$d(a) = 3$, $d(b) = 4$, $d(e) = 2$.

Definicja 6.5 Pseudograf (multigraf, graf) nazywamy płaskim, jeśli narysowany na płaszczyźnie nie ma ani jednej pary przecinających się krawędzi.

Problem Eulera mostów królewieckich (1736 r.)
Czy można tak wytyczyć trasę spaceru po Królewcu zaczynającego się i kończącego w tym samym miejscu, że przechodzi się jednokrotnie przez każdy z 7 mostów na (Pregołe) Pregole?



Aby sformalizować to zadanie, oznaczmy każdy z 4 rejonów lądu (2 brzegi rzeki i 2 wyspy) przez A, D, B, C i zauważymy, że (niezależnie od punktu startu i końca spaceru) gdy wchodzimy i opuszczamy któryś z tych rejonów, to przechodzimy przez 2 mosty, a więc łącznie przez parzystą ich liczbę. Ponieważ jednak do każdego z rejonów prowadzi nieparzysta liczba mostów, taki spacer jest niemożliwy.

Powyższa analiza „przetłumaczona" na język teorii grafów oznacza, że nie istnieje w rozważanym multigrafie (wierzchołkami są rejony A, B, C, D, a krawędziami łączące je mosty) droga zamknięta złożona ze wszystkich krawędzi, ponieważ stopień każdego wierzchołka jest nieparzysty.

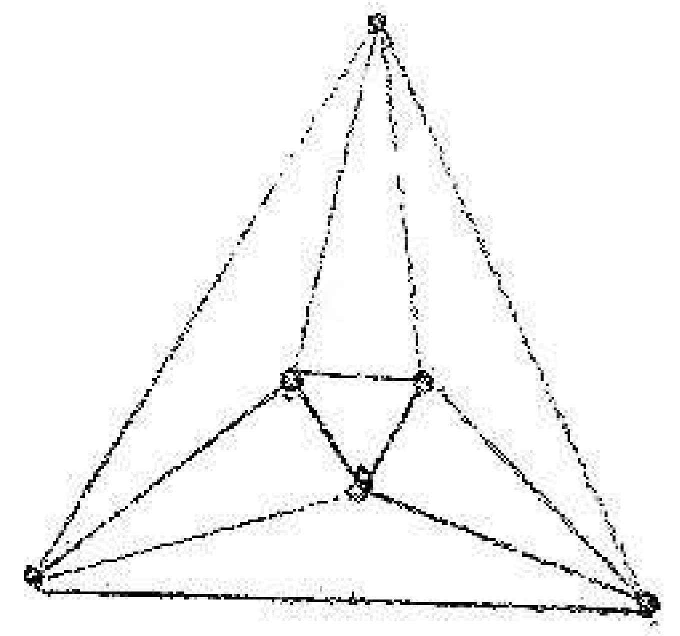
Taką drogę zamkniętą nazywa się teraz eulerowską, a powyższy problem rozstrzyga w całej ogólności

Twierdzenie 6.1. Multigraf posiada drogę zamkniętą Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty.

6.2. Twierdzenie Eulera

Przypomnijmy znany z geometrii wzór Eulera dla wielościanów foremnych (1750 r.):

wielościan	V	E	F	N = V-E+F
Czworościan	4	6	4	2
Sześcian	8	12	6	2
Ośmiościan	6	12	8	2
Dwunastościan	20	30	12	2
Dwudziestościan	12	30	20	2



Ośmiościan

V - liczba wierzchołków
E - -"- krawędzi
F - -"- ścian.

Okazuje się, że wzór ten jest także prawdziwy dla

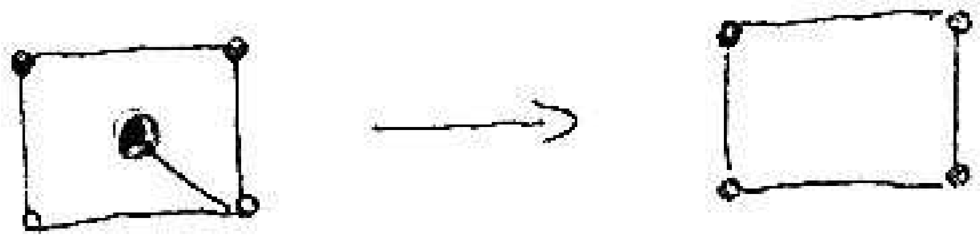
pseudografów płaskich, o ile tylko są spójne.
Określmy jeszcze, czym jest ściana grafu. Ściana to zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą nieprzecinającą żadnej krawędzi. Każdy graf płaski posiada jedną nieograniczoną ścianę zwaną zewnętrzną oraz skończoną liczbę ścian zamkniętych tzw. ograniczonych krawędziami grafu.

Twierdzenie 6.2 (Eulera) Jeśli G jest spójnym płaskim pseudografem o p wierzchołkach, q krawędziach oraz r ścianach, to $N = p - q + r = 2$

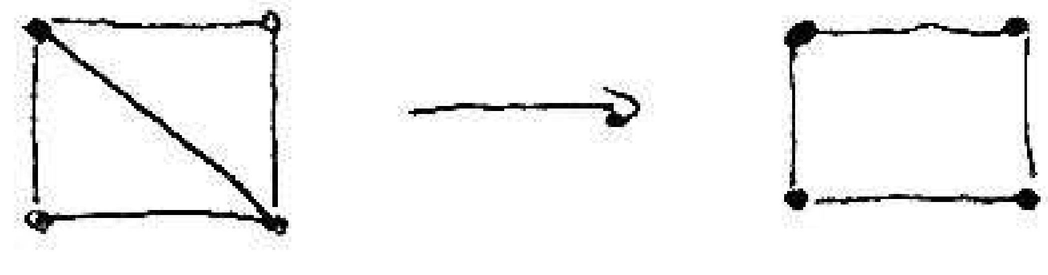
d-d (przez indukcję względem q) wykorzystuje

Lemat 6.3. Jeśli skończony pseudograf G ma przynajmniej jedną krawędź i nie ma wierzchołka stopnia 1, to zawiera cykl.

Jeśli istnieje w G wierzchołek o stopniu 1, to usuwamy go wraz z incydentną z nim krawędzią:



Taka operacja nie zmienia liczby r ścian, a zatem wartość $N' = (p-1) - (q-1) + r = p - q + r = N$ nie ulegnie zmianie.
Jeśli nie ma wierzchołka o stopniu 1, to ponieważ zgodnie z lematem G zawiera cykl, możemy poruszać się po nim, aż dojdziemy do wierzchołka, w którym już byliśmy. Mamy zatem drogę zamkniętą w G i możemy usunąć jedną z krawędzi nie naruszając spójności G:



Zauważmy, że taka operacja nie zmienia liczby wierzchołków p, ale zmniejsza o 1 liczbę krawędzi q oraz liczbę ścian r, bo teraz dwie ściany mające wspólną krawędź stają się jedną. Zatem

$$N' = p - (q-1) + (r-1) = p - q + r = N.$$

Powtarzając powyższą operację pozbędziemy się wszystkich krawędzi $(q=0)$ zostając z jednym wierzchołkiem (G ma być spójny) i jedną ścianą, a więc nie zmieniająca wartości w kolejnych krokach procedury wielkość N wynosi $p-q+r = 1-0+1 = 2$.

R. Wilson "Graphs, Colourings and the Four-colour Theorem"