Opracowanie listy nr 2 z kombinatoryki

1. Takich rozmieszczeń jest (wg kolejności przypadków opisanych w treści zadania):
   $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$,
   10, gdy rozróżniamy pudełka, a kul nie,
   5, gdy rozróżniamy kule, a pudełka nie,
   3.

2. Zadanie znalezienia takich x_i, że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, x_i \in [3, 7]$ jest równoważne znalezieniu takich y_i, że $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5, y_i \in [0, 4]$.
   Zauważmy, że liczbę 5 możemy przedstawić jako sumę pięciu naturalnych składników na tyle sposobów:
   $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ i taki układ $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ jest tylko (1),
   $2 + 1 + 1 + 1 + 0$ i takich układów $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ jest $5 \cdot 4$ (5 miejsc do wyboru dla "2" oraz 4 pozostałe dla "0", 3 "1" wstawiamy w 3 wolne miejsca), czyli (20),
   $2 + 2 + 1 + 0 + 0$ i takich układów $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ jest $5 \cdot 6$ (5 miejsc do wyboru dla "1" oraz z 4 pozostałych wybieramy miejsca dla pary "2"), czyli (30),
   $3 + 1 + 1 + 0 + 0$ i takich układów $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ jest $5 \cdot 6$ (przypadek jak wyżej z "3" w roli "1" oraz "1" w roli "2"), czyli (30),
   $2 + 3 + 0 + 0 + 0$ i takich układów $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ jest $5 \cdot 4$ (przypadek, jak drugi omawiany wyżej), czyli (20),
   $2 + 1 + 1 + 1 + 0$, i takich układów $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ jest $5 \cdot 4$, czyli (20).
   Sumując liczebności poszczególnych przypadków podane w nawiasach mamy odpowiedź: 121.

3. Zauważmy, że każda taka najkrótsza droga składa się z 7 odcinków: 3 razy musimy przesunąć się w prawo (P), 4 razy w dół (D). Możemy ją więc przedstawić jako ciąg 7-elementowy utworzony z "D" oraz "P". Wypisując je wszystkie widzimy, że jest ich 35.
   (To jedyne takie żmudne zadanie na naszych ćwiczeniach, za chwilę rozwiążemy je natychmiast rozpoznając w nim odpowiedni model kombinatoryczny).

4. Wypisując kolejne wyrazy ciągu zgodnie z otrzymaną zależnością rekurencyjną mamy:
   $$a_1 = 1, a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15, a_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31, \ldots$$
   Łatwo zauważyć, że liczby te można kolejno zapisać jako:
   $$2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^4 - 1, \ldots,$$
   czyli ostatecznie mamy $a_n = 2^n - 1$.

5. Zastosujemy dowód indukcyjny przechodząc od razu do zasadniczego kroku:
   $$D_{n+1} = nD_n + nD_{n-1} = nD_n + D_n - (-1)^n = (n + 1)D_n + (-1)^{n+1},$$
   przy czym 1. równość to wyprowadzona na wykładzie zależność rekurencyjna, a 2. to założenie indukcyjne.

6. Najprościej przeprowadzić dowody indukcyjne korzystając z definicji ciągu Fibonacciego, w podpunkcie a) ustalając np. indeks m.

7. Mamy $a_n = 2a_{n-1} + 1$, ponieważ mając wszystkie podziały zbioru A_{n-1} oraz dodatkowy element n, możemy go w każym podziale dołączyć do jednego z występujących w nim podzbiorów (czyli podwajamy a_{n-1}), albo utworzyć nowy podział postaci: A_{n-1} oraz n.
   Ponieważ $a_2 = 1$, więc $a_n = 2^{n-1} - 1$.

8. Mamy $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, ponieważ, aby zbudować wieżę wysokości n musimy albo do wieży wysokości $n-1$ dołożyć jeden z dwóch rodzajów klocków 1-centymetrowych, albo do wieży wysokości $n-2$ dołożyć jeden z trzech rodzajów klocków 2-centymetrowych.
   Korzystając z tego, że $a_1 = 2, a_2 = 6$ otrzymujemy

$$a_n = 0 \cdot (-1)^n + 2/3 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

9. Mamy $c_n = a_n + b_n = b_{n-1} + 3a_{n-1} + 2b_{n-1} = 3c_{n-1}$ oraz $c_0 = a_0 = 1$. Stąd od razu $c_n = 3^n$.

10. Po pierwsze zauważmy, że a) jest szczególnym przypadkiem b) dla $k = 3$. Warto jednak rozrysować te wszystkie przypadki.
    Co do b), do rozmieszczenia k lwów potrzeba co najmniej $2k-1$ klatek, tu mamy o jedną klatkę więcej niż to minimum. (Tu też warto wspomóc się rysunkiem)
    Co do c), należy rozważyć "zawartość" np. ostatniej klatki: czy jest tam lew, czy nie.

11. Gdy narysujemy "drzewko" obrazujące rozwój tej populacji, to widzimy, że po n. miesiącu składa się ona z osobników żyjących miesiąc wcześniej (a_{n-1}) oraz potomków tych, którzy żyli dwa miesące wcześniej (a_{n-2}), czyli $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

12. To typowe zadanie na indukcję dodane jako dodatkowa (nadprogramowa) informacja o ciągu Fibonacciego.