LISTA 3	KOMBINATORYKA	03.2020

1. Liczymy pary uporządkowane (X, Y), (X, Z), (Y, Z). Odpowiedź: $6 \times 7 + 6 \times 11 + 7 \times 11 = 42 + 66 + 77 = 185$.

2. PARLAMENT: Każda z liter poza 'A' występuje dokładnie raz, natomiast 'A' występuje 2 razy. W słowie jest 8 różnych liter, z czego 6 spółgłosek i 2 samogłoski.

   (a) $8 \times 7 = 56$

   (b) $2 \times 6 = 12$

   RZECZPOSPOLITA: Każda z liter poza 'Z', 'P', 'O' występuje dokładnie raz, natomiast każda z liter 'Z', 'P', 'O' występuje 2 razy. W słowie jest 11 różnych liter, z czego 7 spółgłosek i 4 samogłoski.

   (a) $11 \times 10 = 110$

   (b) $4 \times 7 = 28$

3. Zakładamy, że króle są rozróżnialne oraz, że $m, n \geq 4$.

   Gdy król 1 stoi gdzieś na środku szachownicy: $(n-2)(m-2)(nm-9)$.

   Gdy król 1 stoi w rogu: $4(nm-4)$.

   Gdy król 1 stoi z boku szachownicy: $(2(n-2)+2(m-2))(nm-6)$.

   Dodajemy powyższe trzy liczby.

4. Pierwsza i ostatnia cyfra jest dowolna, z tym, że pierwsza nie może być zerem.

   (a) Możliwości: (cyfra setek, cyfra dziesiątek) $\in \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$.
   Odpowiedź: $9 \times 5 \times 10 = 450$.

   (b) Możliwości: (cyfra setek, cyfra dziesiątek) $\in \{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),(6,4),(7,5),(8,6),(9,7)\}$.
   Odpowiedź: $9 \times 8 \times 10 = 720$.

5. Mamy 4 kolory po 13 kart w każdym. Zatem możemy na $13 \times 13 \times 13 \times 13$ sposobów wybrać po jednej karcie z każdego koloru. Odpowiedź na drugie pytanie to: $13 \times 12 \times 11 \times 10$.

6. S - wszyscy studenci

   T -studenci chodzący na tenisa

   K - studenci chodzący na jazdę konną

Mamy:

$$|S| = 120,$$
$$|T \setminus K| = 2|K|,$$
$$|S| - |T \cup K| = 25 + |T \cap K|,$$
$$|T \cup K| = 75.$$

c) $|T \cap K| = |S| - |T \cup K| - 25 = 120 - 75 - 25 = 20$

Zauważmy, że

$$|T \setminus K| = 2|K| = 2|K \setminus T| + 2|T \cap K| = 2|K \setminus T| + 40$$

oraz

$$75 = |T \cup K| = |T \setminus K| + |K \setminus T| + |T \cap K| = |T \setminus K| + |K \setminus T| + 20.$$

Czyli:

$$|T \setminus K| = 2|K \setminus T| + 40$$
$$55 = |T \setminus K| + |K \setminus T|,$$

co daje $|T \setminus K| = 50$ i $|K \setminus T| = 5$.

a) $|K| = |K \setminus T| + |T \cap K| = 25$

b) $|T| = |T \setminus K| + |T \cap K| = 70$

7. L-zbiór uczniów uczących się łaciny

G-zbiór uczniów uczących się greki

H-zbiór uczniów uczących się hebrajskiego

Mamy

$$|L \cup G \cup H| = 30 - 8 = 22$$

oraz

$$|L \cap G \cap H| = 0.$$

Zauważmy również, że

$$|L \cap G| + |G \cap H| + |L \cap H| = |L| + |G| + |H| + |L \cap G \cap H| - |L \cup G \cup H| =$$
$$20 + 14 + 10 + 0 - 22 = 22 = |L \cup G \cup H|.$$

Zatem każdy uczeń, który uczy się języka, uczy się dokładnie dwóch języków. To daje w szczególności

$$|L| = |L \cap G| + |L \cap H|.$$

Zatem

$$|G \cap H| = 22 - |L| = 22 - 20 = 2.$$

8. Z zasady właczeń i wyłączeń:

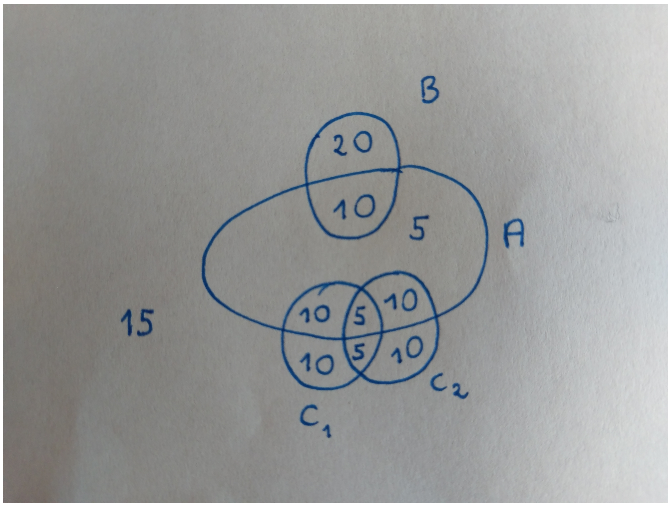
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Czyli

$$|A \cup B \cup C| = 50 + 40 + 30 - 35 - 20 - 25 + 15 = 55.$$

Zatem liczba studentów, którzy zaliczyli conajmniej jeden wykład wynosi 55.

9. Dostajemy $|B| = 30$ i $|A' \cap B' \cap C_1' \cap C_2'| = 15$.



10. $2^5 \times 3^2$, $7^5 \times 11^2$, 7×13^8