Kombinatoryka, omwówienie listy 4

Zadanie 1
(a) Liczymy wszystkie permutacje i odrzucamy „złe”, w których parę liczb $3, 7$ traktujemy jako jeden blok (na dwa sposoby: 37 i 73). **Wynik**: $8! - 2 \cdot 7! = 6 \cdot 7!$.
(b) Liczby $2, 6, 4$ traktujemy jako jeden blok 642. **Wynik**: $6!$.

Zadanie 2
Jednocyfrowe: 4
Dwucyfrowe: $4 \cdot 3 = 12$
Trzycyfrowe: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
Czterocyfrowe: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Wynik: $4 + 12 + 24 + 24 = 64$.
Liczby większe od 3400 to $3425, 3452, 3524, 3542$ oraz czterocyfrowe zaczynające się od 4 lub od 5.
Wynik: $4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 16$.

Zadanie 3
(a) Każda para prostych wyznacza jeden punkt przecięcia, więc punktów przecięcia jest tyle, ile par prostych. **Wynik**: $\binom{n}{2}$.
(b) Proste równoległe traktujemy jako jeden blok. Pozostałych $n - m$ prostych przecina się w $\binom{n-m}{2}$ punktach. Ponadto każda z tych prostych ma z prostymi z bloku prostych równoległych m punktów przecięcia. **Wynik**: $\binom{n-m}{2} + m \cdot (n - m) = \frac{(n-m)(n+m-1)}{2}$.

Zadanie 4
Zauważmy, że dokładnie dwoma kolorami można paznokcie u jednej ręki pomalować na tyle sposobów, ile jest niepustych właściwych podzbiorów zbioru paznokci tej ręki, czyli $2^5 - 2 = 30$ (paznokcie z podzbioru malujemy na jeden kolor, resztę na drugi). Mamy trzy możliwości:
• Na każdej dłoni jeden kolor: $3 \cdot 3 = 9$ (wybór koloru na pierwszą dłoń, wybór koloru na drugą dłoń)
• Na jednej dłoni jeden kolor, na drugiej dwa kolory: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 30 = 540$ (wybór dłoni jednokolorowej, wybór koloru na tę dłoń, wybór pary kolorów na drugą dłoń, wybór sposobu pomalowania dwukolorowej dłoni)
• Na obu dłoniach dwa kolory: $(3 \cdot 30)^2 = 8100$ (wybór pary kolorów na każdą dłoń, wybór sposobu pokolorowania tej dłoni)
Wynik: $9 + 540 + 8100 = 8649$.

Zadanie 5
Zakładamy, że kolejność siedzenia w ławce ma znaczenie, stąd $n(n-1)(n-2) = 240n$. **Wynik**: 17.

Zadanie 6
Kolejność ma znaczenie, litery mogą się powtarzać, osobno zliczamy spółgłoski, osobno samogłoski. **Wynik**: $18^3 \cdot 6^2$.

Zadanie 7
Zapełniamy kolejno sześć miejsc, mamy dziesięć cyfr mogących się powtarzać. **Wynik**: 10^6. W drugiej wersji musimy użyć dwóch siódemek, **dwóch** piątek i dwóch innych cyfr. **Wynik**: $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 5760$.

Zadanie 8
Student wybiera dwa z siedmiu terminów, czyli **wynik**: $\binom{7}{2} = 21$.
Jeśli dwa są w tym samym czasie, to **wynik**: $\binom{5}{2} + 5 \cdot 2 = 20$.

Zadanie 9
W obu przypadkach najpierw wybieramy pustą komórkę (na M sposobów), potem w pozostłych $M - 1$ komórkach umieszczamy po jednej kuli. Zostają nam do rozłożenia (a) dwie lub (b) trzy kule. Korzystamy z kombinacji z powtórzeniami.
(a) **Wynik**: $M \cdot \binom{M-1+2-1}{2} = \frac{M^2 \cdot (M-1)}{2}$.
(b) **Wynik**: $M \cdot \binom{M-1+3-1}{3} = \frac{(M-1) \cdot M^2 \cdot (M+1)}{6}$.

Zadanie 10
Traktujemy trzy gatunki jak rozróżnialne komórki, do których wsadzamy nierozróżnialne k kwiaty, korzystamy zatem z kombinacji z powtórzeniami i dostajemy $\binom{3+k-1}{k} = 36$. **Wynik**: 7.

Zadanie 11
(a) Rozróżnialne: wariacje z powtórzeniami. **Wynik**: 100^{20}. Nierozróżnialne: kombinacje z powtórzeniami. **Wynik**: $\binom{100+20-1}{20} = \binom{119}{20}$.
(b) Rozróżnialne: wariacje bez powtórzeń. **Wynik**: $\frac{100!}{80!}$. Nierozróżnialne: kombinacje. **Wynik**: $\binom{100}{20}$.

Zadanie 12
Mamy litery: $3 \times T, 2 \times S, 2 \times A, 2 \times Y, 1 \times K$ i rozmieszczamy je po kolei wszystkie na dziesięciu miejscach. **Wynik**: $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 75\,600$.

Zadanie 13
Mamy do dyspozycji cyfry: cztery 1, dwie 5 i po jednej 3 i 4. Jest pięć przypadków liczności występowania różnych cyfr:
- $4 + 1$ (cztery takie same cyfry, jedna inna). Są trzy możliwości występowania tej sytuacji (ze względu na różne pojedyncze cyfry), w każdej jest pięć przypadków (pozycja pojedynczej cyfry). Czyli $3 \cdot 5 = 15$ liczb.
- $3+2$. Jedna możliwość, $\binom{5}{2}$ przypadków (pozycje podwójnej cyfry). Czyli $1 \cdot \binom{5}{2} = 10$ liczb.
- $3+1+1$. Jest $\binom{3}{2}$ możliwości (wybór pojedynczych cyfr), w każdej $5 \cdot 4$ przypadków (pozycje pojedynczych cyfr). Czyli $\binom{3}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 60$ liczb.
- $2 + 2 + 1$. Są dwie możliwości (wybór pojedynczej cyfry), w każdej $5 \cdot \binom{4}{2}$ przypadków (pozycja pojedynczej cyfry, pozycja pary jednej z podwójnych cyfr). Czyli $2 \cdot 5 \cdot \binom{4}{2} = 60$ liczb.
- $2 + 1 + 1 + 1$. Są dwie możliwości (wybór podwójnej cyfry), w każdej $5 \cdot 4 \cdot 3$ przypadków (pozycje pojedynczych cyfr). Czyli $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$ liczb.

Wynik: $15 + 10 + 60 + 60 + 120 = 265$.

Zadanie 14
Dzielimy 14 osób na 7 par, a ponieważ kolejność par jest nieważna, więc **Wynik**: $\frac{14!}{2^7 \cdot 7!}$.

Zadanie 15
Rozważając analogicznie, jak w zadaniu 13 wszystkie przypadki mamy **Wynik**: $722\,400$.

Zadanie 16
a) **Wynik**: $5 \cdot 14!$;
b) **Wynik**: $11!$;
c) wyróżniając przypadki w zależności od liczby występujących par mamy **Wynik**: $\frac{3005}{2} \cdot 9!$.

Zadanie 17
Jeśli m_i, $i = 1, \ldots, 7$ oznacza liczebność i. cyfry, to wiemy, że

$$\frac{7!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_7!} = 42,$$

skąd $m_i! = 5!$ dla dokładnie jednego i. **Wynik**: 5 cyfr jest jednakowych oraz dwie różne.