KOMBINATORYKA (A)

LISTA ZADAŃ (5) – ROZWIĄZANIA

Zadanie 1. Udowodnij, że liczba $\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4}$ jest całkowita.

Rozwiązanie. Proste podstawienie $n = 1$ pokazuje, że nie mamy co liczyć na to, że liczba ta jest całkowita dlatego, że zawsze jest sumą całkowitych. Odpadają więc wszelkie rozważania o podzielności poszczególnych składników tej sumy. Trzeba zadane wyrażenie potraktować jako całość. Powinno być jasne, że oznacza to sprowadzenie go do wspólnego mianownika:

$$\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4} = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24}.$$

Ponieważ chcemy uzasadnić podzielność licznika przez mianownik, to do tego celu wygodniej będzie dysponować licznikiem w postaci iloczynu. Potrzebujemy więc pierwiastków licznika. Łatwo zauważyć, że w liczniku suma współczynników przy parzystych potęgach zmiennej n $(1 + 11 = 12)$ jest równa sumie współczynników przy jej potęgach nieparzystych $(6 + 6 = 12)$. Stąd wynika, że -1 jest pierwiastkiem wielomianu $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, oprócz oczywistego 0. Ta uwaga daje pierwszy rozkład wielomianu $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ na trzy czynniki: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n + 1)(n^2 + 5n + 6)$. Dalej, analizując trójmian $n^2 + 5n + 6$, łatwo już stwierdzić, że również -2 i -3 są pierwiastkami licznika, co ostatecznie daje jego następujący rozkład:

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3).$$

Zatem licznik jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych. Wśród nich dwie na pewno są parzyste, przy czym jedna z tych liczb parzystych jest podzielna przez 4, co daje podzielność tego iloczynu przez 8. A ponieważ co trzecia liczba całkowita jest podzielna przez 3, więc wśród powyższych 4 kolejnych co najmniej jedna jest na pewno podzielna przez 3. W rezultacie cały iloczyn jest podzielny przez $3 \cdot 8 = 24$, co należało udowodnić.

Zadanie 2. a) Korzystając z wzoru dwumianowego Newtona pokaż, że

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} a^k b^{p-k} = \binom{n}{p}(a+b)^p, \quad n \geq p \geq 0.$$

Rozwiązanie. Naturalnym odruchem wielu z Państwa jest liczenie takich zależności w najbardziej narzucający się sposób, a więc od lewej do prawej. Natomiast podana tu wskazówka (skorzystać z dwumianu Newtona) sugeruje, żeby liczyć w kierunku odwrotnym, jako że wzór dwumianowy dotyczy wyrażeń postaci $(a + b)^p$. Oprócz wzoru Newtona (patrz Skrypt, Rozdział 3, cz. 3.2, wzór 3.8) w dalszym ciągu wykorzystamy również definicję symbolu Newtona "n po k" $\binom{n}{k}$ (Skrypt, R. 3, cz. 3.1, wzór 3.3). Liczymy więc:

$$\binom{n}{p}(a+b)^p = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} a^k b^{p-k} = \ldots$$

Ponieważ czynnik $\binom{n}{p}$ nie zależy od k, więc możemy skorzystać z rozdzielności mnożenia względem dodawania i "wciągnąć" go "do środka" sumy, co daje dalej

$$\cdots = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{p}\binom{p}{k} a^k b^{p-k} = \ldots$$

Teraz korzystamy z definicji symbolu (nie dwumianu!) Newtona i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\cdots &= \sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{p!}{k!(p-k)!} a^k b^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{(n-p)!}\frac{1}{k!(p-k)!} a^k b^{p-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{k!}\frac{1}{(p-k)!(n-p)!} a^k b^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} a^k b^{p-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} a^k b^{p-k}.\end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy lewą stronę równości podanej w zadaniu, co kończy dowód.

Zadanie 2. b) Korzystając z wzoru udowodnionego w punkcie a) przez odpowiednie podstawienie pokaż, że

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}, \quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0, \quad n \geq p \geq 0.$$

Rozwiązanie. Żeby uzyskać pierwszy z powyższych wzorów podstawiamy do wzoru z 2 a) $a = b = 1$, a żeby uzyskać drugi — $a = -b = -1$.

Zadanie 3. a) Udowodnij, że dla $n \geq 1$ i $a \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a+1)^{k+1} - 1}{k(k+1)} - a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Rozwiązanie. Stosujemy indukcję po liczbie składników sumy, tzn. po n.
Dla $n = 1$ lewa strona powyższego wzoru redukuje się do $\frac{a^2}{2}$, natomiast prawa – do $\frac{(a+1)^2-1}{2} - a$. Łatwy rachunek pokazuje, że te wyrażenia są równe.
Załóżmy więc, że powyższy wzór zachodzi dla pewnego n. Udowodnimy, że przy tym założeniu zachodzi on również dla $n + 1$. Liczymy więc korzystając z rozlicznych własności symbolu Newtona, np. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, $\binom{k}{k} = 1$ czy

$\frac{\binom{n}{k-1}}{k} = \frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} + \binom{n+1}{n+1}\frac{a^{n+2}}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} + \frac{a^{n+2}}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} + \binom{n}{n}\frac{a^{n+2}}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} + \binom{n}{n}\frac{a^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} = \dots$$

Ponieważ w kolejnych kilku przekształceniach ostatni składnik, do którego dopiero wtedy zastosujemy założenie idukcyjne, pozostanie niezmieniony, dla uproszczenia zapisu oznaczymy go jako A, tzn. $A = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)}$.

$$\dots = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{n}{k-1}}{k}\frac{a^{k+1}}{(k+1)} + A = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)} + A = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{n+1}{k}}{k+1}a^{k+1} + A =$$
$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{n+2}{k+1}}{n+2}a^{k+1} + A = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}a^{k+1} + A =$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{l=2}^{n+2}\binom{n+2}{l}a^{l} + A =$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{l=0}^{n+2}\binom{n+2}{l}a^{l} - (n+2)a - 1\right) + A =$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\big((a+1)^{n+2} - (n+2)a - 1\big) + A = \quad (\text{def. } A)$$
$$= \frac{(a+1)^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)} - \frac{a}{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^{k+1}}{k(k+1)} = \quad (\text{zał. ind.})$$
$$= \frac{(a+1)^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)} - \frac{a}{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(a+1)^{k+1}-1}{k(k+1)} - a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(a+1)^{k+1}-1}{k(k+1)} + \frac{(a+1)^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)}\right) - \left(a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{a}{(n+1)}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(a+1)^{k+1}-1}{k(k+1)} - a\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}. \quad (\text{Uff!})$$

Zadanie3. b) Udowodnij, że dla $n \geq 1$ i $a \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Rozwiązanie. Podstawiamy do 3a $a = -1$ i liczymy. W istocie należy sprawdzić, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Zadanie 4. a) Uzasadnij kombinatorycznie lub algebraicznie, że

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Rozwiązanie. (alg.) Dwukrotnie stosujemy łatwą i znaną Państwu zależność dotyczącą symbolu Newtona (Skrypt, R. 3, cz. 3.2, nienumerowany wzór po 3.12):

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n}(k-1)k\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n}(k-1)n\binom{n-1}{k-1} =$$
$$= n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=2}^{n}(n-1)\binom{n-2}{k-2} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} =$$
$$= n(n-1)\sum_{l=0}^{n-2}\binom{n-2}{l} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Oczywiście w ostatniej równości wykorzystaliśmy wzór dwumienny Newtona dla $a = b = 1$.

Zadanie 4. b) Uzasadnij kombinatorycznie lub algebraicznie, że

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}, \quad m \geq n.$$

Rozwiązanie. (alg., indukcja po m) Łatwo sprawdzić, że wzór ten zachodzi dla $m = 0$, jako że wtedy również $n = 0$ i lewa strona wzoru składa się tylko z jednego składnika dla $k = 0$, tzn. z $\binom{0}{0}$ i jest równa 1. Natomiast prawa, $\binom{m+1}{n+1}$, jest wtedy również równa 1, gdyż $\binom{0+1}{0+1} = \binom{1}{1} = 1$.

Jeśli teraz założymy, że dla pewnego m,

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1},$$

to wtedy korzystając z tej równości mamy:

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{k}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} + \binom{m+1}{n} = \binom{m+1}{n+1} + \binom{m+1}{n} = \binom{m+2}{n+1}.$$

A więc wzór ten zachodzi również dla $m+1$, o ile zachodził dla m. To kończy indukcję.

Uwaga dla 'purystów'. Zauważmy, że zastosowanie indukcji zwalnia nas z konieczności udzielania odpowiedzi na pytanie: "Jak interpretować symbol Newtona $\binom{k}{n}$, gdy $k < n$?" Powyższe rozumowanie wykazuje, że jakkolwiek jest on interpretowany, to zależność podana w zadaniu jest i tak prawdziwa. Dla czystości — na ogół $\binom{k}{n}$, gdy $k < n$, jest przyjmowane jako 0 i tak należy ten symbol interpretować w tym zadaniu. Ta uwaga pozwala zdjąć ograniczające założenie $m \geq n$. Rzeczywiście, jeżeli $m < n$, to wtedy wzór ten mówi po prostu o równości zer.

Zadanie 4. c) Uzasadnij kombinatorycznie lub algebraicznie, że

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}, \quad l \leq \min(n,m).$$

Rozwiązanie. (komb.) Przypomnijmy, że symbol Newtona $\binom{n}{k}$ wyraża liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, tzn.

$$\binom{n}{k} = |\{X : X \subseteq A \wedge |X| = k\}|, \quad \text{gdzie}|A| = n.$$

Łatwo wtedy zrozumieć, że prawa strona powyższego wzoru wyraża liczbę l-elementowych podzbiorów zbioru $(m+n)$-elemntowego. Dlaczego lewa wyraża to samo?

No cóż, żeby to zrozumieć weźmy dwa zbiory rozłączne, powiedzmy A i B, $A \cap B = \varnothing$, przy czym załóżmy ponadto, że A ma m elementów, tzn. $|A| = m$, natomiast B ma n elementów, $|B| = n$. Wtedy oczywiście $|A \cup B| = m + n$. Niech teraz C będzie dowolnym l-elementowym podzbiorem $A \cup B$. Wtedy $C = C \cap (A \cup B) = C \cap A \cup C \cap B$, tzn. C rozpada się na dwie rozłączne części $C_A = C \cap A$ oraz $C_B = C \cap B$, przy czym $C_A \subseteq A$, $C_B \subseteq B$. Łatwo sprawdzić (zrobć to!), że odpowiedniość $C \leftrightarrow (C_A, C_B)$ jest odpowiedniością wzajemnie jednoznaczną. Chodzi o to, że ilekroć mamy l-elementowy zbiór C, to mamy(jednoznacznie) wyznaczone jego tzw. 'ślady' na A (to jest C_A) i na B (tj. C_B), przy czym C_A jest co najwyżej l-elementowym podziorem A, zaś C_B — $l - |C_A|$-elementowym podzbiorem B. Jest również odwrotnie — ilekroć mamy X, k-elementowy podzbiór zbioru A, $k \leq l$, oraz Y, $(l-k)$-elementowy podzbiór B, to możemy je zsumować i otrzymamy l-elementowy podzbiór $A \cup B$. Dlatego l-elementowych podzbiorów $A \cup B$ jest tyle samo co takich par (X, Y). Z kolei zbiór tych par możemy przedstawić jako sumę parami rozłącznych zbiorów takich par (X, Y), że X ma ustaloną liczbę elementów k, $k = 0, 1, \ldots, l$.

Stąd mamy

$$\begin{aligned}
\binom{m+n}{l} &= |\{C \subseteq A \cup B : |C| = l\}| = \\
&= |\{(X,Y) : X \subseteq A \wedge Y \subseteq B \wedge |X \cup Y| (= |X| + |Y|) = l\}| = \\
&= |\bigcup_{k=0}^{l} \{(X,Y) : X \subseteq A \wedge |X| = k \wedge Y \subseteq B \wedge |Y| = l-k\}| = \\
&= \sum_{k=0}^{l} |\{(X,Y) : X \subseteq A \wedge |X| = k \wedge Y \subseteq B \wedge |Y| = l-k\}| = \\
&= \sum_{k=0}^{l} |\{X : X \subseteq A \wedge |X| = k\} \times \{Y : Y \subseteq B \wedge |Y| = l-k\}| = \\
&= \sum_{k=0}^{l} |\{X : X \subseteq A \wedge |X| = k\}| \cdot |\{Y : Y \subseteq B \wedge |Y| = l-k\}| = \\
&= \sum_{k=0}^{l} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{l-k}.
\end{aligned}$$

Zadanie 4. d) Uzasadnij kombinatorycznie lub algebraicznie, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Rozwiązanie. (alg.; indukcja po n) Zadanie jest szkolne i wszyscy powinni poradzić sobie z nim bez większych problemów. Ale na wszelki wypadek...

Najpierw sprawdzamy prawdziwość powyższego wzoru dla $n = 1$. Łatwo się zorientować, że w tym przypadku dostaniemy tożsamość $1 = 1$.

Jeśli natomiast wzór ten zachodzi dla pewnego n, to wtedy dla $n+1$ mamy (z wykorzystaniem założenia indukcyjnego)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) = \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).
\end{aligned}$$

Skąd wiemy, że $2n^2 + 7n + 6$ rozkłada się na $(n + 2)(2n + 3)$? Nie wiemy, ale wiemy, jakiego wyniku oczekujemy, więc sprawdzamy rzecz łatwiejszą niż rozkład trójmianu, a mianowicie sprawdzamy, że $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$. A to wystarczy.

Zadanie 4. e) Uzasadnij kombinatorycznie lub algebraicznie, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}.$$

Rozwiązanie. (alg.) Ponownie wykorzystamy zależność $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, a ponadto tożsamość $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ oraz Zadanie 4.c.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(k\binom{n}{k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(n\binom{n-1}{k-1}\right)^2 = n^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}^2 =$$
$$= n^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k-1} = n^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{n-1-(k-1)} =$$
$$= n^2 \binom{2n-2}{n-1}.$$

Zadanie 4. f) Uzasadnij kombinatorycznie lub algebraicznie, że

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \binom{m+1}{2}^2.$$

Rozwiązanie. (alg.; indukcja po m) Początek indukcji dla $m = 1$ wszyscy powinni umieć zrobić sami. Krok indukcyjny ma polegać na udowodnieniu wzoru dla $m + 1$, a więc wzoru

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \binom{m+2}{2}^2,$$

z zastosowaniem podanego w zadaniu wzoru dla m. Liczymy więc

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \binom{m+1}{2}^2 + (m+1)^3 =$$
$$= \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3 = (m+1)^2 \left(\frac{m^2}{4} + m + 1\right) =$$
$$= (m+1)^2 \frac{(m+2)^2}{4} = \binom{m+2}{2}^2$$

Zadanie 4. g) Uzasadnij kombinatorycznie lub algebraicznie, że

$$\sum_{i=0}^{l} \binom{n-i}{l-i}\binom{n}{i} = 2^l \binom{n}{l}, \quad n \geq l.$$

Rozwiązanie. (komb.) Prawa strona 'liczy' ilość l-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, przy czym tym razem każdy z tych podzbiorów jest liczony 2^l razy. Uzasadnimy, że lewa strona 'liczy' (wyraża) to samo.

W tym celu ustalmy A, zbiór n-elementowy. Jak możemy w nim zdefinować dowolny jego podzbiór l-elementowy? Na przykład tak: Na początek wybieramy X, jego dowolny podzbiór i-elementowy, gdzie $i = 0, 1, \ldots, l$. Przy każdym z tych i takich podzbiorów X jest $\binom{n}{i}$. Następnie uzupełniamy tego i-elementowca X do l-elementowca dobierając $l - i$ elementów z dopełnienia X w A, tzn. z $A \setminus X$. Ponieważ $|A \setminus X| = n - i$, więc takich uzupełnień jestz kolei $\binom{n-i}{l-i}$. Ponieważ ponadto wybór tego uzupełnienia jest niezależny od wyboru samego X, więc przy każdym $i = 0, 1, \ldots, l$ ta metoda daje $\binom{n}{i}\binom{n-l}{l-i}$ l-elementowych podzbiorów zbioru A, a więc ogółem $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n-l}{l-i}$ takich podzbiorów.

Powinno być jednak jasne, że liczymy te l-elementowe podzbiory A z powtórzeniami. Ile razy powtarzamy? Cóż, policzmy. Niech więc Y będzie dowolnym l-elementowym podzbiorem A. Punktem wyjścia do uzyskania tego zadanego Y – a więc zbiorem X – może być jego dowolny podzbiór. $(l - |X|)$-elementowe uzupełnienie X-a będzie już wyznaczone jednoznacznie. Zatem l-elementowy zbiór Y jest liczony tyle razy, ile sam ma podzbiorów, tzn. 2^l razy. To kończy dowód.

Zadanie 4. h) Uzasadnij kombinatorycznie lub algebraicznie, że

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

Rozwiązanie. (komb.) Lewa strona 'liczy' ilość dwuelementowych podzbiorów, czyli par nieuporządkowanych, zbioru $2n$-elementowego. Dzielimy ten zbiór na dwie połowy, tzn. na dwa zbiory rozłączne po n elementów każdy. Powinno być wtedy jasne, że wspomniane wyżej pary nieuporządkowane dzielą się teraz na trzy rozłączne kategorie: (a) te, które są zawarte w jednej połowie; (b) te, które są zawarte w drugiej połowie; (c) te, których jeden element jest w jednej, a drugi – w drugiej połowie. Jeśli teraz policzymy, ile jest par każdej z tych kategorii, to suma tych liczb da liczbę par początkowego zbioru $2n$-elementowego, a więc $\binom{2n}{2}$.

Oczywiście, par kategorii (a) oraz (b) jest tyle samo, mianowicie $\binom{n}{2}$, bo to są dwuelementowe podzbiory zbiorów n-elementowych. Natomiast par kategorii (c) jest n^2 — każdy z elementów takiej pary możemy wybrać niezależnie od tego drugiego na n sposobów. Stąd żądana zaleność $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

Zadanie 5. Oblicz wartości następujących sum

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a + bk) = \sum_{k=0}^{n-1} a + \sum_{k=0}^{n-1} bk = na + b\sum_{k=0}^{n-1} k = na + b\frac{(n-1)n}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k =$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k =$$

$= \ldots$ należy zastosować wzory na sumy 3., 2. i 1. poteg pierwszych n liczb naturalnych i otrzymać

$$\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

$$\sum_{n=1}^{k} n(k-n) = \sum_{n=1}^{k}(nk-n^2) = \sum_{n=1}^{k} nk - \sum_{n=1}^{k} n^2 = k\sum_{n=1}^{k} n - \sum_{n=1}^{k} n^2 =$$

$= \ldots$ zastosować potrzebne wzory, ale ostrożnie teraz n jest indeksem sumowania, a granicą sumowania – k. Dlatego w końcowym wzorze nie może być n, a musi być $k =$

$$= \frac{1}{6}(k-1)k(k+1).$$

$$\sum_{n=1}^{m}(3n-1)(3n+2) = m(3m^2+6m+1) \text{ (powinno być jasne).}$$