Kombinatoryka, omówienie listy 4

Zadanie 1

Niech p, c, t, w oznaczają liczby odpowiednio pomarańczowych, cytrynowych, truskawkowych i wiśniowych żujków. Pierwsze założenie mówi nam, że

$$\frac{p \cdot c}{\binom{p+c+t+w}{2}} = \frac{\binom{c}{2}}{\binom{p+c+t+w}{2}}, \text{ czyli } p \cdot c = \binom{c}{2}.$$

Drugie założenie mówi nam, że

$$\frac{c \cdot t}{\binom{p+c+t+w}{2}} = \frac{\binom{t}{2}}{\binom{p+c+t+w}{2}}, \text{ czyli } c \cdot t = \binom{t}{2}.$$

Mamy ustalić, które z prawdopodobieństw jest większe:

$$\frac{\binom{t}{2} \cdot p}{\binom{p+c+t+w}{3}} \text{ czy } \frac{\binom{c}{2} \cdot t}{\binom{p+c+t+w}{3}}.$$

Ale na mocy założeń mamy

$$\binom{t}{2} \cdot p = (c \cdot t) \cdot p = (p \cdot c) \cdot t = \binom{c}{2} \cdot t,$$

więc rozważane prawdopodobieństwa są równe.

Zadanie 2

Zdarzenie polega na rozmieszczaniu siedmiu osób w siedmiu rozróżnialnych komórkach (dni tygodnia). Wszystkich takich rozmieszczeń jest 7^7. Skorzystamy ze zdarzenia przeciwnego sprawdzając, w ilu przypadkach każda osoba urodziła się w innym dniu tygodnia. Takich przypadków jest $7!$, zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi $1 - \frac{7!}{7^7}$. Korzystając ze wzoru Stirlinga otrzymujemy, że prawdopodobieństwo to w przybliżeniu wynosi $1 - \frac{\sqrt{14\pi} \cdot 7^7}{7^7 \cdot e^7} = 1 - \frac{\sqrt{14\pi}}{e^7} \approx 1 - 0,006 = 0,994$.

Zadanie 3

Ponieważ w urnie mamy 18 rozróżnialnych kul, więc wszystkich zdarzeń elementarnych jest $\binom{18}{m}$. Korzystając ze zdarzenia przeciwnego wystarczy znaleźć najmniejszą wartość liczby m, dla której prawdopodobieństwo otrzymania samych kul czarnych jest $< \frac{1}{2}$. Zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu jest $\binom{16}{m}$, musimy zatem znaleźć najmniejsze naturalne rozwiązanie nierówności

$$\frac{\binom{16}{m}}{\binom{18}{m}} < \frac{1}{2}.$$

Ponieważ

$$\frac{\binom{16}{m}}{\binom{18}{m}} = \frac{\frac{16!}{m! \cdot (16-m)}}{\frac{18!}{m! \cdot (18-m)}} = \frac{(18-m)(17-m)}{18 \cdot 17},$$

więc dostajemy nierówność $(18-m)(17-m) < 9 \cdot 17$, czyli równoważnie $m^2 - 35m + 153 < 0$. Najmniejsze naturalne rozwiązanie tej nierówności to $m = 6$.

Zadanie 4
Wszystkich możliwych rozmieszczeń 10 ponumerowanych kul w trzech rozróżnialnych komórkach jest $3^{10} = 59049$.
(a) Skorzystamy ze zdarzenia przeciwnego, czyli policzymy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu „co najmniej jedna komórka jest pusta”. Są dwie możliwości. (1) Dwie komórki są puste – wtedy wszystkie kule trafiają do jednej komórki, którą możemy wybrać na 3 sposoby. (2) Jedna komórka jest pusta (wybieramy ją na 3 sposoby), a pozostałe kule dzielą się na dwie pozostałe komórki. Wobec tego do jednej z nich trafia k kul, gdzie $1 \leqslant k \leqslant 9$, które możemy wybrać na $\binom{10}{k}$ sposobów, a pozostałe do drugiej – w sumie daje to

$$\sum_{k=1}^{9} \binom{10}{k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} - \binom{10}{0} - \binom{10}{10} = 2^{10} - 2$$

możliwości. Ostatecznie zdarzeniu przeciwnemu sprzyja $3 + 3 \cdot (2^{10} - 2) = 3069$ zdarzeń elementarnych (rozmieszczeń), więc szukane prawdopodobieństwo to $1 - \frac{3069}{59049} = \frac{6220}{6561} \approx 0,948$.
(b) Skoro w każdej komórce są przynajmniej trzy kule, to w dwóch komórkach są dokładnie trzy kule, a w jednej cztery kule. Komórkę z czterema kulami wybieramy na 3 sposoby, a kule do niej na $\binom{10}{4}$ sposobów. Z pozostałych sześciu kul wybieramy trzy na $\binom{6}{3}$ sposoby i wsadzamy do jednej z pozostałych komórek, a reszta kul trafia do ostatniej komórki. Zatem szukane prawdopodobieństwo to $\frac{3 \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3}}{3^{10}} = \frac{3 \cdot 210 \cdot 20}{59049} = \frac{1400}{6561} \approx 0,213$.

Zadanie 5
Oczywiście dla $k > n$ prawdopodobieństwo wynosi zero. Załóżmy zatem, że $k \leqslant n$. Wszystkich zdarzeń elementarnych jest m^n. Zliczamy zdarzenia sprzyjające: najpierw wybieramy k kul (spośród n kul), które znajdą się w urnie nr 2, na $\binom{n}{k}$ sposobów, a potem pozostałe $n - k$ kul rozmieszczamy w pozostałych $m - 1$ urnach na $(m-1)^{n-k}$ sposobów.
Wynik: $\frac{\binom{n}{k} \cdot (m-1)^{n-k}}{m^n}$.

Zadanie 6
Trzynaście kart z 52 można wybrać na $\binom{52}{13}$ sposobów.
(a) Pięć pików można wybrać na $\binom{13}{5}$ sposobów, cztery kiery na $\binom{13}{4}$ sposobów, trzy trefle na $\binom{13}{3}$ sposobów, a jedno karo na $\binom{13}{1}$ sposobów. Zatem odpowiedź to $\frac{\binom{13}{5} \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{52}{13}}$.
(b) Otrzymanie układu 5-4-3-1 oznacza, że dostało nam się 5 kart jednego koloru, 4 innego, 3 różnego od występujących wcześniej i 1 karta pozostałego koloru. Takich układów jest $4\binom{13}{5}3\binom{13}{4}2\binom{13}{3}\binom{13}{1}$.
(c) Takich układów mamy $4\binom{13}{5}\binom{3}{2}\binom{13}{3}^2\binom{13}{2}$.
(d) Taki układ można otrzymać na $\binom{4}{3}\binom{13}{4}^3\binom{13}{1}$ sposobów.

Zadanie 7
Rozdzielanie 10 (nierozróżnialnych) ciastek między trzy osoby odpowiada malowaniu 10 nierozróżnialnych kul trzema kolorami. Można to zrobić na $\binom{10+3-1}{2} = \binom{12}{2} = 66$ sposobów (kombinacje z powtórzeniami). Chcąc policzyć liczbę zdarzeń sprzyjających zakładamy, że najpierw każdej z osób dajemy po jednym wymaganym ciastku, a potem pozostałe siedem ciastek rozdzielamy według tego samego schematu, co możemy zrobić na $\binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$ sposobów. Postępując analogicznie w drugim przypadku dostajemy odpowiedzi :

(a) $\frac{36}{66} = \frac{6}{11}$
(b) $\frac{15}{66} = \frac{5}{22}$.

Zadanie 8
Dowód nierówności Bonferroniego: Z własności $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ otrzymujemy $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B)$. Ale $\mathbf{P}(A \cup B) \leqslant 1$, zatem $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) \geqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1$, co kończy dowód.
Zastosowanie: Skoro $\mathbf{P}(A) = 0,5$ i $\mathbf{P}(B) = 0,9$, to z nierówności Bonferroniego otrzymujemy $\mathbf{P}(A \cap B) \geqslant 0,5 + 0,9 - 1 = 0,4$. Z drugiej strony $A \cap B \subseteq A$, więc $\mathbf{P}(A \cap B) \leqslant \mathbf{P}(A) = 0,5$. Jeśli $A \subseteq B$, to $A \cap B = A$ – wtedy $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,5$ i to jest wartość największa. Jeśli $A \cup B = \Omega$, to $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,4$ (dlaczego?) i to jest wartość najmniejsza.
Wynik: $\mathbf{P}_{\max}(A \cap B) = 0,5$; $\mathbf{P}_{\min}(A \cap B) = 0,4$.

Zadanie 9
Skoro zdarzenia A i B wykluczają się, to znaczy, że $A \cap B = \emptyset$, zatem $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$. Skoro przynajmniej jedno z nich musi zajść, to znaczy, że $A \cup B = \Omega$, zatem $\mathbf{P}(A \cup B) = 1$. Korzystając z własności $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ otrzymujemy równanie $1 = x + x^2 - 0$, czyli $x^2 + x - 1 = 0$, skąd $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (bo z warunku $\mathbf{P}(A) = x$ wynika, że $x \geqslant 0$).