(10) Mamy $P(2) = \frac{1}{3}$, $P(5) = \frac{1}{5}$, $P(1) = P(3) = P(4) = P(6) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{7}{60}$. Zatem

$$P(1) + P(2) + P(3) = \frac{7}{60} + \frac{1}{3} + \frac{7}{60} = \frac{17}{30}.$$

(11) Niech $P$ będzie zdarzeniem, że Piotr jest obecny i niech $J$ będzie zdarzeniem, że Jan jest obecny. Mamy $P(P) = \frac{9}{10}$, $P(J) = \frac{1}{2}$ i $P(P \cap J) = \frac{9}{20}$. Zatem

(a) $P(P \cup J) = \frac{1}{2} + \frac{9}{10} - \frac{9}{20} = \frac{19}{20}$,
(b) $P(P \setminus J) + P(J \setminus P) = P(P \cup J) - P(P \cap J) = \frac{19}{20} - \frac{9}{20} = \frac{1}{2}$,
(c) $1 - P(P \cup J) = 1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$.

(12) Niech $A$ będzie zdarzeniem wylosowania asa oraz niech $C$ będzie zdarzeniem wylosowania karty czerwonej. Mamy $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ oraz $P(A \cap C) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$. Zatem $P(A)P(C) = P(A \cap C)$, czyli zdarzenia $A$ i $C$ są niezależne.

(13) Mamy $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Zauważmy, że $A \cap B \cap C = \{1\}$, a zatem $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$. To daje $P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B \cap C)$. Natomiast dla np. zdarzeń $A$ i $B$ zachodzi $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, ale $P(A)P(B) = \frac{1}{4}$. Zdarzenia $A$, $B$ i $C$ są zatem zależne.

(14) Oznaczmy $P(A \setminus B) = x$, $P(B \setminus A) = z$, $P(A \cap B) = y$. Z założeń mamy $x + y = \frac{1}{3}$ i $x + y + z = \frac{3}{4}$, co daje $z = \frac{5}{12}$. Niezależność $A$ i $B$ tłumaczy się na $(x + y)(y + z) = y$, czyli $\frac{1}{3}(y + z) = y$, zatem $y = \frac{z}{2} = \frac{5}{24}$. Dostajemy również $x = \frac{1}{3} - y = \frac{1}{8}$.

Stąd

$$P(B) = y + z = \frac{5}{24} + \frac{5}{12} = \frac{5}{8},$$
$$P(A \setminus B) = x = \frac{1}{8}$$
$$P(A \cup B') = 1 - P(B \setminus A) = 1 - z = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

(15) Niech $B$ oznacza zdarzenie trafienia "10" przez Bolka i niech $L$ oznacza zdarzenie trafienia "10" przez Lolka. Mamy zatem $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(B') = \frac{3}{4}$, $P(L) = \frac{1}{3}$, $P(L') = \frac{2}{3}$. Szukane prawdopodobieństwo to:

$$P(B) + P(B')P(L')P(B) + P(B')P(L')P(B')P(L')P(B) + \ldots = P(B) \sum_{i=0}^{\infty} (P(B')P(L'))^n =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

(16) Niech $P$ oznacza zdarzenie, że wygra Paweł, $R$ zdarzenie, że wygra Rysiek oraz $S$ zdarzenie, że wygra Szymek. Mamy zatem $P(P) = P(R) = P(S) = \frac{1}{2}$. Szukane prawdopodobieństwo to:

$$P(P')P(R) + P(P')P(R')P(S')P(P')P(R) + \ldots = P(P')\left(\sum_{i=0}^{\infty}(P(R')P(S')P(P'))^n\right)P(R) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{2}{7}.$$

(17) (a) Szukane zdarzenie to: $A_1 \cup \ldots \cup A_n$.

W przypadku gdy zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne i każde z nich ma prawdopodobieństwo $p$, zdarzenia $A'_1, \ldots, A'_n$ są również niezależne i każde z nich ma prawdopodobieństwo $1 - p$. Zatem z prawa de Morgana dostajemy:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P((A_1 \cup \ldots \cup A_n)') = 1 - P(A'_1 \cap \ldots \cap A'_n) =$$
$$1 - P(A'_1) \times \ldots \times P(A'_n) = 1 - (1-p)^n.$$

(b) Zdarzenie, że dokładnie $i$-ty element jest wadliwy to:

$$A'_1 \cap \ldots \cap A'_{i-1} \cap A_i \cap A'_{i+1} \cap \ldots \cap A'_n.$$

Zatem szukane zdarzenie to:

$$(A_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap \ldots \cap A'_n) \cup (A'_1 \cap A_2 \cap A'_3 \cap \ldots \cap A'_n) \cup (A'_1 \cap A'_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A'_n) \cup \ldots \cup (A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap \ldots \cap A_n).$$