

MODELE STOCHASTYCZNE

Plan wykładu

1. Łańcuchy Markowa

- 1.1. Podstawowe pojęcia i przykłady
- 1.2. Równania Chapmana-Kołmogorowa
- 1.3. Klasyfikacja stanów
- 1.4. Rozkład graniczny (twierdzenie ergodyczne)
- 1.5. Proces gałązkowy Galtona-Watsona

2. Procesy Poissona

- 2.1. Proces liczący
- 2.2. Definicje procesu Poissona
- 2.3. Odstępy czasu między zdarzeniami i czasy czekania
- 2.4. Dalsze własności procesu Poissona
- 2.5. Uogólnienia procesu Poissona: proces niejednorodny, złożony

3. Procesy odnowy

- 3.1. Strumień i proces odnowy, funkcja odnowy
- 3.2. Twierdzenia graniczne dla procesu i funkcji odnowy oraz ich zastosowania
- 3.3. Złożony proces odnowy
- 3.4. Procesy związane z procesem odnowy
- 3.5. Model Fincha uzupełniania zapasów

4. Łańcuchy Markowa z czasem ciągłym

- 4.1. Jednorodny łańcuch Markowa z czasem ciągłym
- 4.2. Proces urodzin i śmierci

5. Procesy gaussowskie, procesy stacjonarne

- 5.1. Standardowy ruch Browna
- 5.2. Definicja i przykłady procesów gaussowskich
- 5.3. Procesy stacjonarne i stacjonarne w węższym sensie (własności i przykłady)

Podstawowa literatura

- 1. Ross, S.M.(2000), *Introduction to probability models*, Hartcourt Academic Press, San Diego,
- 2. Resnick, S.I.(1992), *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, Boston,
- 3. Karlin, S., Taylor, H.M.(1975) *A First Course in Stochastic Processes* Academic Press, New York.

Modele stochastyczne

Lista zadań nr 1

1. W urnie znajduje się 8 kul czarnych i 4 białe, obok leży kula czarna. W każdym kolejnym kroku poczynając od "zerowego" losujemy kulę z urny i zamieniamy ją z tą leżącą obok. Przyjmujemy, że $X_n = 0$, jeśli wylosowana w n . kroku kula jest biała oraz $X_n = 1$, jeśli w n . kroku losujemy kulę czarną.
 - a) Uzasadnij, że ciąg tak określonych zmiennych losowych jest łańcuchem Markowa;
 - b) wyznacz jego rozkład początkowy i macierz prawdopodobieństw przejść;
 - c) oblicz $P(X_2 = 1)$.
2. Cząsteczka porusza się po okręgu znajdując się w kolejnych sekundach w jednym z punktów: 0,1,2,3, ponumerowanych zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Będąc w pierwszym i ostatnim może albo w nich pozostać z prawdopodobieństwami: 0.5 – dla punktu 0 oraz 0.2 – dla punktu 3, albo przesunąć się o dwa punkty do przodu. Z dwóch pozostałych punktów cząsteczka przechodzi albo o jedno "stanowisko" do przodu z prawdopodobieństwami: 0.4 – dla punktu 1 oraz 0.3 – dla punktu 2, albo o jedno do tyłu.

Określając dla powyższego modelu odpowiedni łańcuch Markowa, wyznacz jego macierz prawdopodobieństw przejść oraz klasy stanów.
3. W pewnym eksperymencie powtarzane są wielokrotnie takie same próby, których wyniki klasyfikowane są jako sukces albo porażka. Jeśli dwie kolejne próby kończą się sukcesem, to następna także zakończy się sukcesem z prawdopodobieństwem 0.8. W pozostałych przypadkach sukces w następnej próbie występuje z prawdopodobieństwem 0.5.

Określając odpowiedni łańcuch Markowa wyznacz jego klasy stanów i określ, czy są chwilowe, czy rekurencyjne.
4. Dla systemu ubezpieczeniowego *Bonus-Malus* określ odpowiedni łańcuch Markowa i wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść.
5. Dana jest następująca macierz prawdopodobieństw przejść w jednym kroku:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

- a) Wyznacz wartość stałej a .
- b) Wiedząc, że rozkład początkowy jest postaci:

$$\alpha_0 = 0.3, \quad \alpha_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0.4, \quad \alpha_3 = 0.1, \quad \alpha_4 = 0.1,$$

oblicz $P(X_2 = 2)$.

- c) Wyznacz klasy stanów opisanego łańcucha Markowa.
 - d) Określ, które z nich są rekurencyjne, a które chwilowe.
6. Niech $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie postaci $P(Z_1 = k) = a_k, k = 0, 1, \dots$, natomiast $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ ciągiem określonym równaniem

$$X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + Z_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

a X_0 nieujemną całkowitoliczbową zmienną losową niezależną od $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$. Wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść tego łańcucha Markowa.

7. Dla łańcucha Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść postaci

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

oblicz $P(X_n = 0 | X_0 = 0)$.

8. Pokaż, że jeśli stan i jest rekurencyjny oraz nie komunikuje się ze stanem j , to $P_{ij} = 0$. Zatem, jeśli proces wejdzie do klasy rekurencyjnej, to już nigdy jej nie opuści.

9. Dla rozważanych w powyższych zadaniach łańcuchów Markowa wyznacz, o ile istnieje, rozkład stacjonarny.

10. Udowodnij, że

$$\sigma^2(X) = E(\sigma^2(X|Y)) + \sigma^2(E(X|Y)).$$

11. Niech

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

gdzie $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, a N – niezależną od tego ciągu zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne. Stosując odpowiednio wzór z poprzedniego zadania, udowodnij, że

$$\sigma^2(S) = E(N)\sigma^2(X_1) + \sigma^2(N)(E(X_1))^2.$$

12. Korzystając ze wzorów na wartość oczekiwaną oraz wariancję sumy losowej, wyznacz wartość oczekiwaną oraz wariancję liczebności n . generacji w procesie Galtona-Watsona, czyli wykaż prawdziwość następujących wzorów:

$$E(X_n) = \begin{cases} \mu^n, & X_{n-1} \geq 1 \\ 0, & X_{n-1} = 0, \end{cases}$$

$$\sigma^2(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{1-\mu^n}{1-\mu}, & \mu \neq 1 \\ \sigma^2 n, & \mu = 1. \end{cases}$$

13. Rozważmy populację, której rozwój opisuje proces Galtona-Watsona. Załóżmy, że generację zerową tworzy pięć osobników (tzn. $X_0 = 5$), a rozkład liczby potomków zadany jest ciągiem $\{P_k, k = 0, 1, \dots\}$.

Wyznacz prawdopodobieństwo wymarcia takiej populacji, jeśli

$$P_0 = \frac{6}{13}, \quad P_1 = \frac{4}{13}, \quad P_2 = P_3 = P_4 = \frac{1}{13};$$

oraz jeśli

$$P_1 = \frac{1}{6}, \quad P_3 = \frac{1}{2}, \quad P_5 = \frac{1}{3}.$$

Modele stochastyczne

Lista zadań nr 2

1. Udowodnij, że zmienna losowa T z gęstością jest wykładnicza wtedy i tylko wtedy, gdy T ma własność braku pamięci.
2. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z parametrami α i β , odpowiednio. Wyznacz $P(X > Y)$.
3. Udowodnij, że z Definicji 2.1 procesu Poissona wynika Definicja 2.2 (*patrz wykład*).
4. Samochody przejeżdżają ustalony punkt na autostradzie zgodnie z procesem Poissona z intensywnością $\lambda = 3/\text{min}$. Jeśli zając potrzebuje s sekund, by przebiec tę autostradę, to jakie jest prawdopodobieństwo, że uda mu się bez szwanku znaleźć po jej drugiej stronie?
Wyznacz to prawdopodobieństwo dla $s = 2, 5, 20$.
5. Niech $\{N(t), t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona z intensywnością λ , a S_n oznacza moment wystąpienia n . zdarzenia. Oblicz:
 - a) $E(S_4)$;
 - b) $E(S_4|N(1) = 2)$;
 - c) $E(N(4) - N(2)|N(1) = 3)$.
6. Pokaż, że jeśli $\{N_i(t), t \geq 0\}$ są niezależnymi procesami Poissona o intensywnościach $\lambda_i, i = 1, 2$, to ich suma jest procesem Poissona o intensywności $\lambda_1 + \lambda_2$.
7. W nawiązaniu do poprzedniego zadania oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsze zdarzenie procesu N pochodzi z procesu N_1 .
8. Przypuśćmy, że zdarzenia występują zgodnie z procesem Poissona z intensywnością $\lambda = 2/\text{h}$. Wyznacz:
 - a) prawdopodobieństwo tego, że między godziną 18. a 19. nie wystąpi żadne zdarzenie;
 - b) oczekiwany moment 4. zdarzenia, jeśli chwila "startu" procesu przypada w południe;
 - c) prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej dwóch zdarzeń między godziną 15. a 17.
9. Niech $S(t)$ oznacza cenę ubezpieczenia w chwili t . Załóżmy, że proces $\{S(t), 0 \leq t\}$ pozostaje niezmienny do chwili wystąpienia zdarzenia - "wstrząsu", kiedy to cena ubezpieczenia jest mnożona przez pewien losowy czynnik. Jeśli $N(t)$ oznacza liczbę tych zdarzeń do chwili t , a $X_i - i$. czynnik, to możemy zapisać, że

$$S(t) = S(0) \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{N(t)}.$$

Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem γ , a $\{N(t), t \geq 0\}$ niezależnym od nich procesem Poissona o intensywności λ . Niech ponadto $S(0) = s$.

Pokaż, że

$$E(S(t)) = s \exp\left\{-\lambda t\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\right\},$$

oraz

$$E(S^2(t)) = s^2 \exp\left\{-\lambda t\left(1 - \frac{2}{\gamma^2}\right)\right\}.$$

Wskazówka. Zauważ, że

$$E(S(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(S(t)|N(t) = k)P(N(t) = k).$$

10. Klienci pojawiają się w banku zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ . Przypuśćmy, że w ciągu pierwszej godziny przybyło dwóch klientów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- oba pojawili się w ciągu pierwszych 20 minut;
 - przynajmniej jeden pojawił się w ciągu pierwszych 20 minut.
11. Pasażerowie przychodzą na przystanek autobusowy zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ . Autobus odjeżdża w chwili t . Niech X oznacza łączny czas czekania na odjazd autobusu wszystkich odjeżdżających w chwili t – ich liczba wynosi $N(t)$. Wyznacz:
- $E(X|N(t))$;
 - $\sigma^2(X|N(t))$;
 - $\sigma^2(X)$.
12. Przypuśćmy, że zdarzenia występują zgodnie z niejednorodnym procesem Poissona o funkcji średniej postaci

$$m(t) = t^2 + 2t, \quad t \geq 0.$$

Wyznacz prawdopodobieństwo wystąpienia n zdarzeń w czasie $[4, 5]$.

13. Przypuśćmy, że kierowcy podjeżdżają na myjnię samochodową zgodnie z procesem Poissona o intensywności $\lambda = 10/\text{h}$. Przyjmując, że wartość zamawianej przez każdego z nich usługi nie zależy od pozostałych, ale ma taki sam jak inne rozkład jednostajny na $\{10, 12, 20\}$ wyznacz średnią i wariancję całkowitej kwoty wydanej przez klientów tej myjni w ciągu 7 godzin jej otwarcia.

Modele stochastyczne

Lista zadań nr 3

1. Zakładając, że czasy między odnowami mają rozkład Poissona z parametrem α , wyznacz;
 - a) rozkład S_n ;
 - b) $P(N(t) = n)$.
2. Wiedząc, że funkcja odnowy procesu $\{N(t), t \geq 0\}$ jest postaci $m(t) = t/2, \quad t \geq 0$, oblicz $P(N(5) = 0)$.
3. Warunkując względem chwili pierwszej odnowy, udowodnij

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx.$$

4. Załóżmy, że pewne urządzenie jest wymieniane, kiedy albo zepsuje się, albo osiągnie wiek T lat oraz, że czasy bezawaryjnego działania kolejnych takich urządzeń są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowej dystrybucji F z gęstością f . Niech $N(t)$ oznacza liczbę wymian tego urządzenia w czasie $[0, t]$. Oblicz:
 - a) średni czas między kolejnymi wymianami tego urządzenia;
 - b) cytując odpowiednie twierdzenie graniczne,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}.$$

5. Przypuśćmy, że pewne urządzenie zostaje wymienione kiedy albo zepsuje się, albo osiągnie wiek 3 lat. Nowe kosztuje 4, a naprawa starego – 1. Jeśli po 3 latach urządzenie nadal jest sprawne, zostaje sprzedane za 2.

Wprowadzając odpowiedni złożony proces odnowy i cytując twierdzenie graniczne oraz przyjmując, że czas "życia" tego urządzenia ma rozkład wykładniczy o średniej 5, oblicz, jaki jest średni koszt jego posiadania w długim okresie czasu.

6. Załóżmy, że turyści dochodzą do miejsca przeprawy promowej zgodnie z procesem odnowy średnio co 10 minut i czekają na przystani, aż zbierze się dziesięć osób – wtedy dopiero prom odpływa. Przyjmijmy ponadto, że koszt związany z pobytem na przystani jednej osoby przez godzinę wynosi 3, a na jednorazowe przepłynięcie promu na drugi brzeg potrzeba kwoty 20. Wprowadzając odpowiednio proces odnowy i cytując twierdzenie graniczne wyznacz średni koszt ponoszony przez właściciela przystani i promu w długim okresie czasu.

7. Dla procesu odnowy $\{N(t), t \geq 0\}$ niech $\{A(t), t \geq 0\}$ oznacza tzw. proces "wieku". Udowodnij, że jeśli $E(Y_1) < \infty$, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = 0.$$

8. Przypuśćmy, że w pewnym magazynie zapas uzupełniany jest według schematu $(10, 10 + 70)$, a zapotrzebowania klientów (niezależne od odstępów czasu między ich pojawianiem się) mają rozkład wykładniczy z parametrem 3. Wyznacz prawdopodobieństwo utrzymywania się zapasu na poziomie wynoszącym co najmniej 50 jednostek towaru.

Modele stochastyczne

Lista zadań nr 4

1. Przypuśćmy, że jednokomórkowy organizm może znajdować się w jednym z dwóch stanów A lub B . Osobnik będący w stanie A zmieni stan na B z wykładniczą intensywnością α , natomiast jednostka w stanie B podzieli się na dwa nowe osobniki typu A z wykładniczą intensywnością β . Określ odpowiedni łańcuch Markowa z czasem ciągłym dla populacji tych organizmów i wyznacz odpowiednie parametry tego modelu.
2. Potencjalni klienci przybywają do jednokanałowego systemu obsługi zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ . Jeśli jednak nowo przybyły klient zastanie już w kolejce n oczekujących na obsługę, to wejdzie do systemu z prawdopodobieństwem α_n . Zakładając wykładniczą intensywność obsługi równą μ , opisz powyższy model jako proces urodzin i śmierci oraz wyznacz jego odpowiednie parametry.
3. Wyznacz intensywności urodzin i śmierci dla procesu $\{X(t), t \geq 0\}$, gdzie $X(t)$ oznacza liczebność w chwili t populacji złożonej z osobników mogących rodzić potomstwo, ale nie umierających. Prokreacja każdej jednostki tej populacji odbywa się niezależnie od pozostałych w wykładniczym czasie o średniej $1/\lambda$. (Jest to tzw. *czysty proces urodzin* lub *proces Yule'a*).
4. Wyznacz oczekiwaną liczebność populacji, której rozwój opisuje tzw. *liniowy model wzrostu z imigracją*.
5. Warunkując względem pierwszego przejścia procesu urodzin i śmierci, wyprowadź równanie rekurencyjne na oczekiwany czas przejścia procesu ze stanu i do stanu $i + 1$. Zastosuj go do procesu o stałej intensywności zarówno urodzin, jak i śmierci.
6. Rozważmy system kolejkowy $M/M/3$, w którym średni czas między pojawianiem się kolejnych klientów wynosi 10 minut, a średni czas obsługi klienta 15 minut. Jeśli $X(t)$ oznacza liczbę klientów w chwili t , to $\{X(t), t \geq 0\}$ jest procesem urodzin i śmierci. Wyznacz
 - a) intensywności tego procesu;
 - b) oczekiwany czas przejścia od stanu 1 do stanu 3.
7. Niech $\{B(t), t \geq 0\}$ będzie standardowym ruchem Browna. Wyznacz
 - a) rozkład $B(t) + B(s)$, $s \leq t$;
 - b) $E(B(t_1) \cdot B(t_2) \cdot B(t_3))$, $t_1 < t_2 < t_3$.
8. Uzasadnij, że standardowy ruch Browna jest procesem gaussowskim. Wyznacz jego funkcje średniej i kowariancji.
9. Pokaż, że
 - a) proces Ornsteina-Uhlenbecka jest procesem stacjonarnym,
 - b) proces autoregresji jest procesem stacjonarnym w węższym sensie.
10. Niech $\{N(t), t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona o intensywności 5, a Z niezależną od niego zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 2)$ oraz niech

$$X(t) = Z \cdot (-1)^{N(t)}, \quad t \geq 0.$$

Uzasadnij, że $\{X(t), t \geq 0\}$ jest procesem stacjonarnym w węższym sensie.