UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

M.Majsnerowska

rok akademicki 2019/2020

MODELE STOCHASTYCZNE

Plan wykładu

1. **Łańcuchy Markowa**
   1.1. Podstawowe pojęcia i przykłady
   1.2. Równania Chapmana-Kołmogorowa
   1.3. Klasyfikacja stanów
   1.4. Rozkład graniczny (twierdzenie ergodyczne)
   1.5. Proces gałązkowy Galtona-Watsona

2. **Procesy Poissona**
   2.1. Proces liczący
   2.2. Definicje procesu Poissona
   2.3. Odstępy czasu między zdarzeniami i czasy czekania
   2.4. Dalsze własności procesu Poissona
   2.5. Uogólnienia procesu Poissona: proces niejednorodny, złożony

3. **Procesy odnowy**
   3.1. Strumień i proces odnowy, funkcja odnowy
   3.2. Twierdzenia graniczne dla procesu i funkcji odnowy oraz ich zastosowania
   3.3. Złożony proces odnowy
   3.4. Procesy związane z procesem odnowy
   3.5. Model Fincha uzupełniania zapasów

4. **Łańcuchy Markowa z czasem ciągłym**
   4.1. Jednorodny łańcuch Markowa z czasem ciągłym
   4.2. Proces urodzin i śmierci

5. **Procesy gaussowskie, procesy stacjonarne**
   5.1. Standardowy ruch Browna
   5.2. Definicja i przykłady procesów gaussowskich
   5.3. Procesy stacjonarne i stacjonarne w węższym sensie (własności i przykłady)

Podstawowa literatura

1. Ross, S.M., *Introduction to probability models*, Hartcourt Academic Press, San Diego,
2. Resnick, S.I., *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, Boston,
3. Karlin, S., Taylor, H.M., *A First Course in Stochastic Processes* Academic Press, New York.

Zasady zaliczenia przedmiotu zostaną podane na pierwszych zajęciach.

Modele stochastyczne

Lista zadań nr 1

1. Trzy białe i trzy czarne kule rozmieszczono losowo w dwóch urnach w taki sposób, że w każdej urnie znajdują się trzy kule.
   Mówimy, że system znajduje się w stanie $i, i = 0, 1, 2, 3$, jeśli urna I zawiera i białych kul. W każdym kroku losujemy po jednej kuli z każdej urny i zamieniamy je miejscami. Niech $X_n, n = 0, 1, \ldots$ oznacza stan systemu po n. kroku.
   a) Uzasadnij, że ciąg tak określonych zmiennych losowych jest łańcuchem Markowa;
   b) wyznacz jego rozkład początkowy i macierz prawdopodobieństw przejść;
   c) oblicz $P(X_2 = 1)$.

2. Niech $\{Z_n, n = 1, 2, \ldots\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie postaci $P(Z_1 = k) = a_k$, $k = 0, 1, \ldots$, natomiast $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ciągiem określonym równaniem
   $$X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + Z_{n+1},\ n = 0, 1, \ldots,$$
   a X_0 nieujemną całkowitoliczbową zmienną losową niezależną od $\{Z_n, n = 1, 2, \ldots\}$.
   Wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść tego łańcucha Markowa.

3. Cząsteczka porusza się po okręgu znajdując się w kolejnych sekundach w jednym z punktów: 0,1,2,3, ponumerowanych zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Będąc w pierwszym i ostatnim może albo w nich pozostać z prawdopodobieństwami: 0.5 – dla punktu 0 oraz 0.2 – dla punktu 3, albo przesunąć się o dwa punkty do przodu. Z dwóch pozostałych punktów cząsteczka przechodzi albo o jedno "stanowisko" do przodu z prawdopodobieństwami: 0.4 – dla punktu 1 oraz 0.3 – dla punktu 2, albo o jedno do tyłu.
   Określając dla powyższego modelu odpowiedni łańcuch Markowa, wyznacz jego macierz prawdopodobieństw przejść oraz klasy stanów.

4. W pewnym eksperymencie powtarzane są wielokrotnie takie same próby, których wyniki klasyfikowane są jako sukces albo porażka. Jeśli dwie kolejne próby kończą się sukcesem, to następna także zakończy się sukcesem z prawdopodobieństwem 0.8. W pozostałych przypadkach sukces w następnej próbie występuje z prawdopodobieństwem 0.5.
   Określając odpowiedni łańcuch Markowa wyznacz jego klasy stanów i ich typy.

5. Dana jest następująca macierz prawdopodobieństw przejść w jednym kroku:
   $$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$
   a) Wyznacz wartość stałej a.
   b) Wiedząc, że rozkład początkowy jest postaci:
   $$\alpha_0 = 0.3, \quad \alpha_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0.4, \quad \alpha_3 = 0.1, \quad \alpha_4 = 0.1,$$
   oblicz $P(X_2 = 2)$.
   c) Wyznacz klasy stanów opisanego łańcucha Markowa.
   d) Określ, które z nich są rekurencyjne, a które chwilowe.

6. Dla łańcucha Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść postaci
   $$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$
   oblicz $P(X_n = 0 | X_0 = 0)$.

7. Pokaż, że jeśli stan i jest rekurencyjny oraz nie komunikuje się ze stanem j, to $P_{ij} = 0$. Zatem, jeśli proces wejdzie do klasy rekurencyjnej, to już nigdy jej nie opuści.

8. Przypśćmy, że każdy z dwóch przełączników jest w ciągu dnia włączony bądź wyłączony. W n. dniu każdy wyłącznik będzie niezależnie od drugiego włączony z prawdopodobieństwem

   $$(1 + \text{liczba przełączniów włączonych w (n-1). dniu})/4.$$

   Wyznacz frakcje dni, podczas których oba przełączniki są a) włączone, b) wyłączone.

9. Dla rozważanych w powyższych zadaniach łańcuchów Markowa wyznacz, o ile istnieje, rozkład stacjonarny.

10. Udowodnij, że

    $$\sigma^2(X) = E(\sigma^2(X|Y)) + \sigma^2(E(X|Y)).$$

11. Niech

    $$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

    gdzie $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, a N – niezależną od tego ciągu zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne. Stosując odpowiednio wzór z poprzedniego zadania, udowodnij, że

    $$\sigma^2(S) = E(N)\sigma^2(X_1) + \sigma^2(N)(E(X_1))^2.$$

12. Korzystając ze wzorów na wartość oczekiwaną oraz wariancję sumy losowej, wyznacz wartość oczekiwaną oraz wariancję liczebności n. generacji w procesie Galtona-Watsona, czyli wykaż prawdziwość następujących wzorów:

    $$E(X_n) = \begin{cases} \mu^n, & X_{n-1} \geq 1 \\ 0, & X_{n-1} = 0, \end{cases}$$

    $$\sigma^2(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{1-\mu^n}{1-\mu}, & \mu \neq 1 \\ \sigma^2 n, & \mu = 1. \end{cases}$$

13. Rozważmy populację, której rozwój opisuje proces Galtona-Watsona. Załóżmy, że generację zerową tworzy pięć osobników (tzn. $X_0 = 5$), a rozkład liczby potomków zadany jest ciągiem $\{P_k, \quad k = 0, 1, \ldots\}$.
    Wyznacz prawdopodobieństwo wymarcia takiej populacji, jeśli

    $$P_0 = \frac{6}{13}, \quad P_1 = \frac{4}{13}, \quad P_2 = P_3 = P_4 = \frac{1}{13};$$

    oraz jeśli

    $$P_1 = \frac{1}{6}, \quad P_3 = \frac{1}{2}, \quad P_5 = \frac{1}{3}.$$

Zagadnienia dodatkowe

14. System Bonus-Malus

15. Dwuwymiarowy symetryczny spacer losowy

16. Prawo Hardy'ego-Weinberga

17. Pewien proces produkcyjny i intensywności awarii

18. Zadanie o ruinie gracza i sprawdzanie wiarogodności testu

Modele stochastyczne
Lista zadań nr 2

1. Udowodnij, że zmienna losowa T z gęstością jest wykładnicza wtedy i tylko wtedy, gdy T ma własność braku pamięci.

2. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z parametrami α i β, odpowiednio. Wyznacz $P(X > Y)$.

3. Udowodnij, że z Definicji 2.1 procesu Poissona wynika Definicja 2.2 (*patrz wykład*).

4. Samochody przejeżdżają ustalony punkt na autostradzie zgodnie z procesem Poissona z intensywnością $\lambda = 3/min$. Jeśli zając potrzebuje s sekund, by przebiec tę autostradę, to jakie jest prawdopodobieństwo, że uda mu się bez szwanku znaleźć po jej drugiej stronie? Wyznacz to prawdopodobieństwo dla $s=$ 2, 5, 20.

5. Niech $\{N(t), t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona z intensywnością λ, a S_n oznacza moment wystąpienia n. zdarzenia. Oblicz:
   a) $E(S_4)$;
   b) $E(S_4|N(1) = 2)$;
   c) $E(N(4) - N(2)|N(1) = 3)$.

6. Pokaż, że jeśli $\{N_i(t), t \geq 0\}$ są niezależnymi procesami Poissona o intensywnościach $\lambda_i, i = 1, 2$, to ich suma jest procesem Poissona o intensywności $\lambda_1 + \lambda_2$.

7. W nawiązaniu do poprzedniego zadania oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsze zdarzenie procesu N pochodzi z procesu N_1.

8. Przypuśćmy, że zdarzenia występują zgodnie z procesem Poissona z intensywnością $\lambda = 2$/h. Wyznacz:
   a) prawdopodobieństwo tego, że między godziną 18. a 19. nie wystąpi żadne zdarzenie;
   b) oczekiwany moment 4. zdarzenia, jeśli chwila "startu" procesu przypada w południe;
   c) prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej dwóch zdarzeń między godziną 15. a 17.

9. Niech $S(t)$ oznacza cenę ubezpieczenia w chwili t. Załóżmy, że proces $\{S(t), 0 \geq 0\}$ pozostaje niezmieniony do chwili wystąpienia zdarzenia - "wstrząsu", kiedy to cena ubezpieczenia jest mnożona przez pewien losowy czynnik. Jeśli $N(t)$ oznacza liczbę tych zdarzeń do chwili t, a $X_i - i$. czynnik, to możemy zapisać, że

   $$S(t) = S(0) \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{N(t)}.$$

   Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem γ, a $\{N(t), t \geq 0\}$ niezależnym od nich procesem Poissona o intensywności λ. Niech ponadto $S(0) = s$.
   Pokaż, że

   $$E(S(t)) = s \exp\{-\lambda t(1 - \frac{1}{\gamma})\},$$

   oraz

   $$E(S^2(t)) = s^2 \exp\{-\lambda t(1 - \frac{2}{\gamma^2})\}.$$

Wskazówka. Zauważ, że

$$E(S(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(S(t)|N(t) = k)P(N(t) = k).$$

10. Klienci pojawiają się w banku zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ. Przypuśćmy, że w ciągu pierwszej godziny przybyło dwóch klientów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) obaj pojawili się w ciągu pierwszych 20 minut;
b) przynajmniej jeden pojawił się w ciągu pierwszych 20 minut.

11. Pasażerowie przychodzą na przystanek autobusowy zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ. Autobus odjeżdża w chwili t. Niech X oznacza łączny czas czekania na odjazd autobusu wszystkich odjeżdżających w chwili t – ich liczba wynosi $N(t)$. Wyznacz:
a) $E(X|N(t))$;
b) $\sigma^2(X|N(t))$;
c) $\sigma^2(X)$.

12. Przypuśćmy, ze zdarzenia występują zgodnie z niejednorodnym procesem Poissona o funkcji średniej postaci

$$m(t) = t^2 + 2t, \quad t \geq 0.$$

Wyznacz prawdopodobieństwo wystąpienia n zdarzeń w czasie [4, 5].

13. Przypuśćmy, że kierowcy podjeżdżają na myjnię samochodową zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ= 10/h. Przyjmując, że wartość zamawianej przez każdego z nich usługi nie zależy od pozostałych, ale ma taki sam jak inne rozkład jednostajny na $\{10, 12, 20\}$ wyznacz średnią i wariancję całkowitej kwoty wydanej przez klientów tej myjni w ciągu 7 godzin jej otwarcia.

Zagadnienia dodatkowe

14. Kwota odszkodowania, jej średnia i odchylenie standardowe

15. Funkcja intensywności awarii

16. Licytacja

17. Estymacja liczby zarażonych

18. Niejednorodny proces Poissona

Modele stochastyczne

Lista zadań nr 3

1. Zakładając, że czasy między odnowami mają rozkład Poissona z parametrem α, wyznacz;
a) rozkład S_n;
b) $P(N(t) = n)$.

2. Wiedząc, że funkcja odnowy procesu $\{N(t), t \geq 0\}$ jest postaci $m(t) = t/2, \quad t \geq 0$, oblicz $P(N(5) = 0)$.

3. Warunkując względem chwili pierwszej odnowy, udowodnij
$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx.$$

4. Rozwiąż równanie odnowy, gdy czas między odnowami ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$.

5. Załóżmy, że pewne urządzenie jest wymieniane, kiedy albo zepsuje się, albo osiągnie wiek T lat oraz, że czasy bezawaryjnego działania kolejnych takich urządzeń są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowej dystrybuancie F z gęstością f. Niech $N(t)$ oznacza liczbę wymian tego urządzenia w czasie $[0, t]$. Oblicz:
a) średni czas między kolejnymi wymianami tego urządzenia;
b) cytując odpowiednie twierdzenie graniczne,
$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}.$$

6. Przypuśćmy, że zmieniamy rower kiedy stary albo zepsuje się, albo osiągnie wiek 3 lat. Nowy rower kosztuje 4, a naprawa starego – 1. Jeśli po 3 latach rower nadal jest sprawny, zostaje sprzedany za 2.
Wprowadzając odpowiedni złożony proces odnowy i cytując twierdzenie graniczne oraz przyjmując, że czas "życia" roweru ma rozkład wykładniczy o średniej 5, oblicz, jaki jest średni koszt związany z posiadaniem roweru w długim okresie czasu.

7. Załóżmy, że turyści dochodzą do miejsca przeprawy promowej zgodnie z procesem odnowy średnio co 10 minut i czekają na przystani, aż zbierze się dziesięć osób – wtedy dopiero prom odpływa. Przyjmijmy ponadto, że koszt związany z pobytem na przystani jednej osoby przez godzinę wynosi 3, a na jednorazowe przepłynięcie promu na drugi brzeg potrzeba kwoty 20.
Wprowadzając odpowiednio proces odnowy i cytując twierdzenie graniczne wyznacz średni koszt ponoszony przez właściciela przystani i promu w długim okresie czasu.

8. Dla procesu odnowy $\{N(t), t \geq 0\}$ niech $\{A(t), t \geq 0\}$ oznacza tzw. proces "wieku". Udowodnij, że jeśli $E(Y_1) < \infty$, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi
$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = 0.$$

9. Przypuśćmy, że w pewnym magazynie zapas uzupełniany jest według schematu $(10, 10 + 70)$, a zapotrzebowania klientów (niezależne od odstępów czasu między ich pojawianiem się) mają rozkład wykładniczy z parametrem 3. Wyznacz prawdopodobieństwo utrzymywania się zapasu na poziomie wynoszącym co najmniej 50 jednostek towaru.

Modele stochastyczne

Lista zadań nr 4

1. Przypuśćmy, że jednokomórkowy organizm może znajdować się w jednym z dwóch stanów A lub B. Osobnik będący w stanie A zmieni stan na B z wykładniczą intensywnością α, natomiast jednostka w stanie B podzieli się na dwa nowe osobniki typu A z wykładniczą intensywnością β. Określ odpowiedni łańcuch Markowa z czasem ciągłym dla populacji tych organizmów i wyznacz odpowiednie parametry tego modelu.

2. Potencjalni klienci przybywają do jednokanałowego systemu obsługi zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ. Jeśli jednak nowo przybyły klient zastanie już w kolejce n oczekujących na obsługę, to wejdzie do systemu z prawdopodobieństwem α_n. Zakładając wykładniczą intensywność obsługi równą μ, opisz powyższy model jako proces urodzin i śmierci oraz wyznacz jego odpowiednie parametry.

3. Wyznacz intensywności urodzin i śmierci dla procesu $\{X(t), t \geq 0\}$, gdzie $X(t)$ oznacza liczebność w chwili t populacji złożonej z osobników mogących rodzić potomstwo, ale nie umierających. Prokreacja każdej jednostki tej populacji odbywa się niezależnie od pozostałych w wykładniczym czasie o średniej $1/\lambda$. (Jest to tzw. *czysty proces urodzin* lub *proces Yule'a*).

4. Warunkując względem pierwszego przejścia procesu urodzin i śmierci, wyprowadź równanie rekurencyjne na oczekiwany czas przejścia procesu ze stanu i do stanu $i + 1$.
   Zastosuj go do procesu o stałej intensywności zarówno urodzin, jak i śmierci.

5. Rozważmy system kolejkowy $M/M/3$, w którym średni czas między pojawianiem się kolejnych klientów wynosi 10 minut, a średni czas obsługi klienta 15 minut. Jeśli $X(t)$ oznacza liczbę klientów w chwili t, to $\{X(t), t \geq 0\}$ jest procesem urodzin i śmierci. Wyznacz
   a) intensywności tego procesu;
   b) oczekiwany czas przejścia od stanu 1 do stanu 3.

6. Niech $\{B(t), t \geq 0\}$ będzie standardowym ruchem Browna. Wyznacz
   a) rozkład $B(t) + B(s), \quad s \leq t$;
   b) $E(B(t_1) \cdot B(t_2) \cdot B(t_3)), \quad t_1 < t_2 < t_3$.

7. Uzasadnij, że standardowy ruch Browna jest procesem gaussowskim.
   Wyznacz jego funkcje średniej i kowariancji.

8. Niech $\{N(t),\, t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona o intensywności 5, a Z niezależną od niego zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 2)$ oraz niech

   $$X(t) = Z \cdot (-1)^{N(t)}, \quad t \geq 0.$$

   Uzasadnij, że $\{X(t),\, t \geq 0\}$ jest procesem stacjonarnym w węższym sensie.

Zagadnienia dodatkowe

9. Model liniowego wzrostu z imigracją

10. Splot dowolnych rozkładów wykładniczych

11. Proces Ornsteina-Uhlenbecka

12. Proces autoregresji