

Wskazówki i odpowiedzi do zadań listy nr 1

1. b)

$$\alpha = (0.05, 0.45, 0.45, 0.05), \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

c) $\sum_{i=0}^3 \alpha_i P_{i1}^2 = \frac{103}{180}$.

2.

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

3.

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix};$$

Klasa stanów jest jedną klasą stanów rekurencyjnych.

$$\pi = \left(\frac{48}{143}, \frac{40}{143}, \frac{40}{143}, \frac{15}{143} \right).$$

4.

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix};$$

Klasa stanów jest jedną klasą stanów rekurencyjnych.

$$\pi = \left(\frac{5}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11} \right).$$

5. a) $a = \frac{1}{4}$;

b) $\sum_{i=0}^4 \alpha_i P_{i2}^2 = 0.2$;

c) - d) $\{0\}$, $\{1,2\}$ – klasy chwilowe, $\{3,4\}$ – klasa rekurencyjna.

6. Potęgując kilka razy zadaną macierz łatwo zauważyć, a potem przekonać się stosując indukcję, że $P_{00}^n = (0.5)^n$.

7. To, że stan i nie komunikuje się z j jest równoważne temu, że

i) j nie jest osiągalny z i , czyli dla każdego n $P_{ij}^n = 0$ i mamy tezę,

albo

ii) i nie jest osiągalny z j , czyli dla każdego n $P_{ji}^n = 0$. Wtedy jednak nie jest możliwe, aby $P_{ij} > 0$, bo w połączeniu z powyższym przeczyłoby to rekurencyjności stanu i .

8.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}; \quad \pi = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7} \right).$$

9.

10. Wychodząc z prawej strony równości korzystamy z tego, że

$$\sigma^2(X|Y) = E(X^2|Y) - E^2(X|Y), \quad E(E(X|Y)) = E(X)$$

oraz z definicji wariancji.

11. Przyjmujemy w powyższym zadaniu $X = S$ oraz $Y = N$ oraz korzystamy z tego, że

$$E(S|N) = N \cdot E(X_1), \quad \sigma^2(S|N) = N \cdot \sigma^2(X_1).$$

12. *M.S. Ross* str. 247.

13. a) Ponieważ $\mu = 1$, więc $\pi_0 = 1^5 = 1$;
b) Ponieważ $P_0 = 0$, więc $\pi_0 = 0^5 = 0$.