1.3. Klasyfikacja stanów Łańcucha Markowa

Udowodniliśmy następujące kryterium:

<u>Twierdzenie 1.10.</u> Stan „i" jest rekurencyjny $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$;
— " — — " — chwilowy $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n < \infty$.

Dowodząc, że z chwilowości stanu wynika zbieżność powyższego szeregu, zauważyliśmy, że warunkowym rozkładem liczby „wizyt" Ł.M. w stanie chwilowym, z którego ten Ł.M. startuje ($X_0 = i$) jest rozkład geometryczny $G(1-f_i)$. Stąd stan chwilowy jest z P.1. odwiedzany skończenie wiele razy, co uzasadnia następujący

<u>Wniosek 1.11.</u> W Ł.M. o skończonej liczbie stanów co najmniej jeden stan jest rekurencyjny.

Twierdzenie-kryterium pozwala także uzasadnić, że własność rekurencyjności (chwilowości) jest własnością klasy.

<u>Wniosek 1.12.</u> Jeżeli stan „i" jest rekurencyjny oraz $i \Leftrightarrow j$, to stan „j" jest także rekurencyjny.

<u>d-d.</u> Z tego, że $i \Leftrightarrow j$ wynika istnienie $k, m = 0, 1, \ldots$:
$P_{ij}^k > 0$ oraz $P_{ji}^m > 0$. Ponadto

$$P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^m \cdot P_{ii}^n \cdot P_{ij}^k, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

ponieważ prawa strona powyższej nierówności przedstawia tylko jedną z wielu możliwości przejścia z stanu „j" do „j" w $(m+n+k)$ krokach. Stąd, sumując po n mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^m \cdot P_{ij}^k \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = \infty,$$

ponieważ $P_{ji}^m \cdot P_{ij}^k > 0$, a $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$.

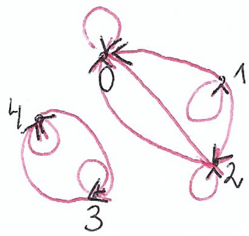
Na mocy tw. 1.10. wnioskujemy, że $\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n \geq \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{m+k+n} = \infty$,
czyli stan „j" jest także rekurencyjny.

Wniosek 1.13. Jeśli stan „i" jest chwilowy oraz $i \leftrightarrow j$, to stan „j" jest także chwilowy.
d-d Załóżmy a c. że „j" jest rekurencyjny. Wtedy na mocy wniosku 1.12. stan „i" musiałby być także rekurencyjny, co przeczyłoby jego chwilowości.

Wniosek 1.14. Wszystkie stany skończonego i nieredukowalnego Ł.M. są rekurencyjne.
d-d wynika od razu z wniosków 1.11. oraz 1.12.

Przykład 1.4.
a) Rozważmy Ł.M. o $E = \{0,1,2,3,4\}$ i macierzy $\mathbb{P}$ postaci

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



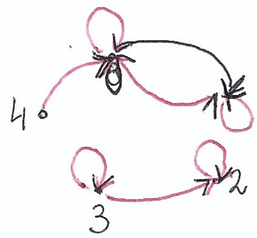
Obliczając kilka kolejnych potęg macierzy $\mathbb{P}$ łatwo zauważyć, że

$$\mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2^n} & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Klasy tego Ł.M. to: $\{0,2\}$, $\{3,4\}$ oraz $\{1\}$.
Ponieważ $P_{00}^n = P_{22}^n = P_{33}^n = P_{44}^n = \frac{1}{2}$, więc dwie pierwsze klasy są rekurencyjne ($\sum_n P_{ii}^n = \infty$). Natomiast $P_{11}^n = \frac{1}{2^n}$, czyli $\sum_n P_{11}^n = \sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$, co oznacza, że stan (klasa) $\{1\}$ jest chwilowy.

b) Rozważmy Ł.M. o przestrzeni stanów E jak w podpunkcie a) i macierzy $\mathbb{P}$ postaci

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Klasy tego Ł.M. to $\{0,1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ oraz $\{4\}$.
Od razu widać, że stan $\{2\}$ jest pochłaniający, a więc rekurencyjny. Stany-klasy $\{3\}$ oraz $\{4\}$ są chwilowe:
- z prawdop. $\frac{1}{3}$ Ł.M. przejdzie ze stanu „3" do stanu „2", a więc już do „3" nie powróci;
- z prawdop. 1 Ł.M. przejdzie ze stanu „4" do klasy $\{0,1\}$.

Co do stanów klasy $\{0,1\}$ pokażemy, że „0" (a więc i „1") <u>nie</u> jest chwilowy (musi być więc rekurencyjny).
Z określenia chwilowości wynika, że stan „0" jest chwilowy, jeśli $P\left(\forall_{n \geq n_0} X_n \neq 0 \mid X_{n_0} = 0\right) > 0$.
Wyliczmy $p = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n \neq 0) \mid X_0 = 0\right)$. Mamy $p = P_{01} \cdot P_{11} \cdot P_{11} \cdot \ldots =$

$$\frac{3}{4} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \lim_{i \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 0.$$

c) Rozważmy jeszcze raz <u>błądzenie losowe</u> na prostej, czyli Ł.M. o przestrzeni stanów $E = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ i prawdopodobieństwach przejść: $P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$, $i \in E$, $0 < p < 1$.

Zauważmy po pierwsze, że w tym Ł.M. wszystkie stany komunikują się (dla dowolnych $i, k \in E$: $P^k_{i,i+k} = p^k > 0$ oraz $P^k_{i,i-k} = (1-p)^k > 0$, są więc wszystkie albo rekurencyjne, albo chwilowe.
Weźmy zatem pod uwagę stan „0" i zbadajmy zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} P^n_{00}$.
Po pierwsze: $P^{2n+1}_{00} = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, ponieważ powrót do (zera) stanu „0" wymaga jednakowej liczby kroków w obu kierunkach, a więc może nastąpić jedynie po parzystej liczbie kroków. Wynika stąd także, że

$$P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\big(p(1-p)\big)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Stosując wzór Stirlinga: $n! \overset{(*)}{\approx} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi}$ otrzymujemy:

$$P_{00}^{2n} \approx \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\, e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1}\, e^{-2n} \cdot 2\pi}\big(p(1-p)\big)^n = \frac{4^n\, n^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{n\cdot\pi}\big(p(1-p)\big)^n = \frac{\big(4p(1-p)\big)^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Ponieważ, jeśli $a_n \approx b_n$, to $\sum_n b_n < \infty \iff \sum_n a_n < \infty$, wystarczy zająć się szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(4p(1-p)\big)^n}{\sqrt{\pi n}}$.

1° Jeśli $p \neq \frac{1}{2}$, to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(4p(1-p)\big)^n}{\sqrt{\pi n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \big(4p(1-p)\big)^n < \infty$,

bo $4p(1-p) \leq 1$, $0 \leq p \leq 1$ oraz $4p(1-p) = 1$ jedynie dla $p = \frac{1}{2}$.

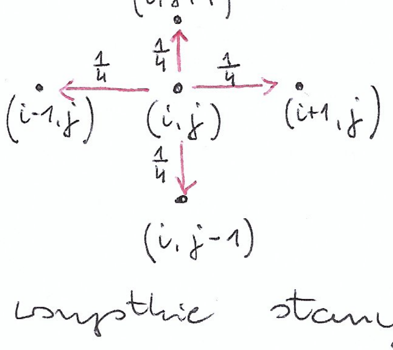
Na mocy twierdzenia - kryterium powyższa zbieżność szeregu oznacza, że „0” jest stanem chwilowym, gdy $p \neq \frac{1}{2}$.

2° Jeśli $p = \frac{1}{2}$, to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(4p(1-p)\big)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$,

czyli stan „0” jest stanem rekurencyjnym, gdy $p = \frac{1}{2}$.

Takie błądzenie losowe (z $p = \frac{1}{2}$) nazywamy symetrycznym błądzeniem losowym na prostej.

Analogicznie pokazuje się, że odpowiednio zdefiniowane symetryczne błądzenie losowe na płaszczyźnie:



ma także wszystkie stany rekurencyjne.

(*) $a_n \approx b_n$, jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

1.4. Rozkład graniczny łańcucha Markowa – twierdzenie ergodyczne

Zajmiemy się teraz zagadnieniem istnienia granicy rozkładów $\alpha_n = (\alpha_0^n, \alpha_1^n, \dots, \alpha_l^n)$, gdzie $\alpha_i^n = P(X_n = i)$, $i \in E = \{0, 1, \dots, l\}$.

Wielowymiarowy rozkład α_n to rozkład stanów Ł.M. $\{X_n, n=0,1,\dots\}$ w chwili n.

Ustalimy, jakie warunki wystarczają na to, by istniała granica $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

Zacznijmy od przykładu.

Przykład 1.5. Rozważmy Ł.M. o macierzy $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p' & 1-p' \end{pmatrix}, \text{ gdzie } 0 < p, p' \le 1.$$

Stosując indukcję łatwo pokazać, że

$$\mathbb{P}^{(n)} = \frac{1}{p+p'} \begin{pmatrix} p' & p \\ p' & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-p')^n}{p+p'} \begin{pmatrix} p & -p \\ -p' & p' \end{pmatrix}.$$

Wtedy, jeśli $p+p' < 2$, to $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^{(n)} = \frac{1}{p+p'} \begin{pmatrix} p' & p \\ p' & p \end{pmatrix}$, bo $\lim_{n\to\infty} (1-a)^n = 0$ dla $-1 < 1-a < 1$.

Jeśli natomiast $p+p' = 2$, to

$$\mathbb{P}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p' & p \\ p' & p \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p & -p \\ -p' & p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{dla } n \text{ parzystego}, \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p' & p \\ p' & p \end{pmatrix} + \frac{(-1)}{2}\begin{pmatrix} p & -p \\ -p' & p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p' & 1-p' \end{pmatrix} = \mathbb{P}, & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \end{cases}$$

Stąd dla $p+p' < 2$ oraz $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ rozkładu początkowego tego Ł.M.

$$\alpha_0 = \lim_{n\to\infty} \alpha_0^n = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in E} P_{j0}^n \cdot \alpha_j =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(P_{00}^n \alpha_0 + P_{10}^n \alpha_1\right) = \alpha_0 \lim_{n\to\infty} P_{00}^n + \alpha_1 \lim_{n\to\infty} P_{10}^n = \alpha_0 \frac{p'}{p+p'} + \alpha_1 \frac{p'}{p+p'} =$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1) \frac{p'}{p+p'} = \frac{p'}{p+p'}.$$

Analogicznie

$$\alpha_1 = \lim_{n\to\infty} \alpha_1^n = \frac{p}{p+p'},$$

czyli dla tego przypadku rozkład graniczny α istnieje i jest postaci $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{p'}{p+p'}, \frac{p}{p+p'}\right)$.

W drugim przypadku, tzw. gdy $p+p'=2$, takiego rozkładu nie da się wyznaczyć, bo nie istnieje granica $\mathbb{P}^{(n)}$.

Zauważmy jeszcze, że graniczny rozkład α nie zależy od rozkładu początkowego $\alpha^0 = (\alpha_0^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0 \dots)$ oraz, że

$$\alpha_0 = \lim_{n\to\infty} P_{00}^n = \lim_{n\to\infty} P_{10}^n.$$

Okazuje się, że istnienie rozkładu granicznego jest ściśle związane z tzw. ergodycznością Ł.M.

Definicja 1.15. Ł.M. $\{X_n, n=0,1,\dots\}$ z macierzą $\mathbb{P} = (P_{ij})$, $i,j \in E$ nazywamy ergodycznym, jeśli

i) dla każdego $j \in E$ istnieje granica $\Pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ dodatnia i niezależna od stanu „i";

ii) ciąg $\{\Pi_j, j\in E\}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa.

Jest to tzw. rozkład ergodyczny lub stacjonarny Ł.M.

Definicja 1.16. Kwadratową macierz $A = (a_{ij})$ o wszystkich wyrazach nieujemnych nazywamy regularną, jeśli macierz A^{n_0} ma wszystkie wyrazy dodatnie dla pewnego $n_0 \geq 1$.

Twierdzenie 1.17 (ergodyczne)

Ł.M. z macierzą $\mathbb{P}$ jest ergodyczny $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}$ jest regularna.

d-d $\Rightarrow$ Z ergodyczności Ł.M mamy dla każdego stanu $i \in E$:

$$0 < \min_{j\in E} \Pi_j = \min_{j\in E} \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \leq \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \text{ dla dowolnego } j \in E,$$

co oznacza, że dla każdej pary st. $(i,j) \in E\times E$ $P_{ij}^{n_0} > 0$ dla pewnego n_0

$\Leftarrow$ Z regularności macierzy prawdop. przejść $\mathbb{P}$ wielkość $a = \min_{i,j\in E} P_{ij}^{n_0}$ jest dodatnia.

Dla dowolnego $j \in E$ niech $m_j^{(n)} = \min_{i\in E} P_{ij}^n$ oraz $M_j^{(n)} = \max_{i\in E} P_{ij}^n$.

Na mocy równań Ch-K (1.4) mamy

$$m_j^{(n+1)} = \min_{i\in E} P_{ij}^{n+1} = \min_{i\in E} \sum_{k\in E} P_{ik} \cdot P_{kj}^n \geq \min_{i\in E} \sum_{k\in E} P_{ik} \min_{k\in E} P_{kj}^n = m_j^{(n)},$$

ponieważ P jest macierzą stochastyczną, czyli $\sum_{k\in E} P_{ik} = 1$, $i\in E$.

Analogicznie, $M_j^{(n+1)} \le M_j^{(n)}$.

Zatem dla każdego $j\in E$ ciąg $\{m_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejący, a ciąg $\{M_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ jest nierosnący.

Ponieważ dla każdego $n=1,2,\dots$ oraz $i,j\in E$ zachodzi

$$m_j^{(n)} \le P_{ij}^n \le M_j^{(n)}$$

oraz można pokazać, że $\lim_{n\to\infty}\left(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\right) = 0$, (*)

więc dla każdego $j\in E$ istnieje $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ niezależna od stanu „i". Ponadto, także dla każdego $j\in E$ i każdego $i\in E$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \ge \lim_{n\to\infty} \min_{i\in E} P_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)} \ge m_j^{(n_0)} \ge a > 0.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że spełniony jest warunek i) def. 1.15. Warunek ii) tej definicji także zachodzi:

$$\sum_{j\in E}\pi_j = \sum_{j\in E}\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in E} P_{ij}^n = 1.$$

Poniższa uwaga wskazuje na związek interesującego nas rozkładu granicznego α z rozkładem ergodycznym π.

<u>Uwaga</u> Dla ergodycznego Ł.M. rozkład π pokrywa się z rozkładem α

<u>d-d</u> Dla dowolnego stanu $j\in E$ mamy

$$\alpha_j = \lim_{n\to\infty}\alpha_j^n = \lim_{n\to\infty} P(X_n=j) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in E} P_{ij}^n\alpha_i^0 = \sum_{i\in E}\pi_j\alpha_i^0 = \pi_j\sum_{i\in E}\alpha_i^0 = \pi_j,$$

bo $\{\alpha_0^0, \alpha_1^0, \dots, \alpha_l^0\}$ jest rozkładem początkowym rozważanego Ł.M.

Kolejne twierdzenie pokazuje, jak rozwiązując pewne równanie macierzowe wyznaczyć rozkład ergodyczny (rozkład α) Ł.M.

<u>Twierdzenie 1.18.</u> Jeśli Ł.M. jest ergodyczny, to rozkład $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_l)$ jest jedynym probabilistycznym rozwiązaniem układu równań

$$\pi_j = \sum_{i\in E} P_{ij}\pi_i \quad \text{lub równoważnie} \quad \pi = \pi P. \tag{1.9}$$

(*) Dowód tego faktu można znaleźć w monografii: T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels, (2000) Stochastic Processes for Insurance and Finance.

d-d Na mocy równań Ch-K. (1.4) mamy dla dowolnego $j \in E$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P^n_{kj} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} P^{n-1}_{ki} \cdot P_{ij} = \sum_{i\in E}\left(\lim_{n\to\infty} P^{n-1}_{ki}\right)\cdot P_{ij} = \sum_{i\in E} \pi_i P_{ij},$$

czyli π spełnia układ równań (1.9). Aby pokazać jedyność rozwiązania, załóżmy a c., że istnieje inny rozkład prawdop. $\pi' = (\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_l)$ taki, że $\pi'_j = \sum_{i\in E} \pi'_i P_{ij}$, $j \in E$.

Zauważmy, że wtedy
$$\pi'_j = \sum_{i\in E}\pi'_i P_{ij} = \sum_{i\in E}\left(\sum_{k\in E}\pi'_k P_{ki}\right)P_{ij} =$$
$$\sum_{k\in E}\pi'_k\left(\sum_{i\in E} P_{ki} P_{ij}\right) = \sum_{k\in E}\pi'_k P^2_{kj} = \dots \text{ i.t.d.} =$$
$$= \sum_{r\in E}\pi'_r P^n_{rj}, \quad j\in E, \quad n = 1,2,\dots$$

Przechodząc z $n\to\infty$, mamy dla każdego $j \in E$
$$\pi'_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{r\in E}\pi'_r P^n_{rj} = \sum_{r\in E}\pi'_r \lim_{n\to\infty} P^n_{rj} = \pi_j \sum_{r\in E}\pi'_r = \pi_j .$$

Uwaga. Graniczne prawdopodobieństwo π_j tego, że Ł.M. znajdzie się w stanie „j" po czasie n ($n\to\infty$) jest często interpretowane jako proporcja czasu, który obserwowany Ł.M. spędzi w stanie „j" w tzw. nieograniczonym horyzoncie czasowym lub po prostu jako szansa przebywania w tym stanie.

Przykład 1.5. (Model socjologiczny).
Przypuśćmy, że w pewnym uproszczeniu obywateli państwa X można podzielić ze względu na wykonywany zawód na trzy klasy: A, B, C oraz, że przemieszczenia między tymi klasami opisuje Ł.M. o trzech stanach A, B, C i macierzy $\mathbb{P}$ postaci:
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{pmatrix}.$$

Pierwszy wiersz tej macierzy określa (zgodnie z przyjętą interpretacją) prawdopodobieństwa tego, że dziecko obywatela klasy A będzie wykonywało zawód typowy dla klasy kolejno A, B oraz C.
Aby oszacować, jak będzie kształtowała się procentowa liczebność poszczególnych klas w dłuższej perspektywie czasu obliczamy rozkład graniczny tej Ł.M.

Ponieważ macierz $\mathbb{P}$ jest regularna, więc możemy skorzystać z układu równań (1.9) otrzymując

$$\begin{cases} \pi_A = 0.45\pi_A + 0.05\pi_B + 0.01\pi_C \\ \pi_B = 0.48\pi_A + 0.70\pi_B + 0.50\pi_C \\ \pi_C = 0.07\pi_A + 0.25\pi_B + 0.49\pi_C \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu $(\pi_A, \pi_B, \pi_C) = (0.07, 0.62, 0.31)$ oznacza, że w długim horyzoncie czasowym 7% tego społeczeństwa będzie wykonywało zawody typowe dla klasy A, 62% - dla klasy B oraz 31% - dla klasy C.

Poniższe twierdzenie pokazuje jeszcze jedną możliwość zastosowania rozkładu ergodycznego Ł. M.

<u>Twierdzenie 1.19.</u> Niech $\{X_n, n=0,1,\dots\}$ będzie nieredukowalnym Ł. M. o rozkładzie ergodycznym $\{\pi_j, j\in E\}$, a h funkcją ograniczoną określoną na E. Wtedy z P. 1.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h(X_n) = \sum_{j\in E} h(j)\pi_j. \qquad (1.10)$$

<u>d-d</u>. Niech $a_j(N)$ będzie łącznym czasem przebywania Ł. M. w stanie „j" w okresie $1, 2, \dots, N$. Wtedy z P. 1.

$$\sum_{n=1}^{N} h(X_n) = \sum_{j\in E} a_j(N)\cdot h(j).$$

Ponieważ zgodnie z przyjętą interpretacją rozkładu $\{\pi_j, j\in E\}$ mamy z P. 1: $\lim_{N\to\infty}\frac{a_j(N)}{N} = \pi_j$, $j\in E$,

więc zachodzi (1.10).

Jeśli przyjmiemy, że z przebywaniem Ł. M. w stanie „j" wiąże się wypłata (albo strata, koszt) wynosząca $h(j)$, to zgodnie z powyższym twierdzeniem średnia wypłata na jednostkę czasu wynosi $\sum_{j\in E} h(j)\pi_j$.

Powyższą uwagę zilustrujemy przykładem odnoszącym się do systemu ubezpieczeń samochodowych Bonus-Malus.

<u>Przykład 1.6.</u> Wyznaczmy średnią roczną składkę dla tego ubezpieczenia zakładając, że wielkość roszczeń Y ma rozkład Poissona z param. $\frac{1}{2}$. Wtedy (*)

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.6065 & 0.3033 & 0.0758 & 0.0144 \\ 0.6065 & 0 & 0.3033 & 0.0902 \\ 0 & 0.6065 & 0 & 0.3935 \\ 0 & 0 & 0.6065 & 0.3935 \end{pmatrix},$$

skąd z układu (1.9) wyznaczamy

$$\pi_1 = 0.3692, \quad \pi_2 = 0.2395, \quad \pi_3 = 0.2103, \quad \pi_4 = 0.1809.$$

Ponieważ $h(1) = 200$, $h(2) = 250$, $h(3) = 400$ i $h(4) = 600$, więc zgodnie z prawą stroną (1.10) średnia roczna składka tego ubezpieczenia wynosi

$$200 \cdot \pi_1 + 250 \cdot \pi_2 + 400 \cdot \pi_3 + 600 \cdot \pi_4 = 326,375.$$

(*) Jedna z wersji systemu Bonus-Malus została omówiona na ćwiczeniach.

1.5. Proces gałązkowy Galtona-Watsona

Rozważmy populację składającą się z osobników rodzących potomstwo tego samego typu. Początkowi osobnicy tworzą generację (pokolenie) zerową o liczebności X_0, ich potomkowie – 1. generację o liczebności X_1, i.t.d. X_n oznacza liczebność n. generacji, czyli

$$X_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_{n-1}^{(i)}, & \text{gdy } X_{n-1} \geq 1, \\ 0, & \text{gdy } X_{n-1} = 0, \end{cases} \qquad (1.11)$$

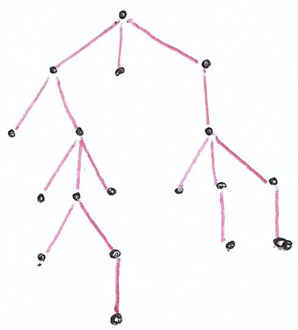
gdzie zmienne losowe $Z_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, \dots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie $\{P_j, j = 0, 1, \dots\}$.

Znaczenie zm. los. $Z_n^{(i)}$ to liczba potomków i. osobnika (n-1). generacji.

Widzimy z określenia X_n (1.11), że stan n. pokolenia zależy jedynie od liczebności (n-1). pokolenia i potomków tej generacji, zatem $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ jest łańcuchem Markova zwanym procesem gałązkowym.

Nazwę tłumaczy następujący przykład takiego procesu:

$X_0 = 1$
$X_1 = 3$
$X_2 = 3$
$X_4 = 6$
$X_5 = 4$
$X_6 = 1$
$X_7 = 0$



Zajmiemy się określeniem prawdopodobieństwa π_0 zdarzenia W oznaczającego wymarcie rozważanej populacji, przy założeniu, że $X_0 = 1$. Formalnie:

$$\pi_0 = P(W) = \lim_{n \to \infty} P(X_n = 0). \qquad (1.12)$$

Posłużymy się funkcją tworzącą rozkładu zm. losowej Z, czyli

$$g_Z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P_k.$$

Ponadto, niech $\mu = E(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} j P_j$.

Twierdzenie 1.20. Jeśli $0<\mu \le 1$, to $\pi_0 = 1$,
jeśli $\mu > 1$, to $\pi_0 < 1$.

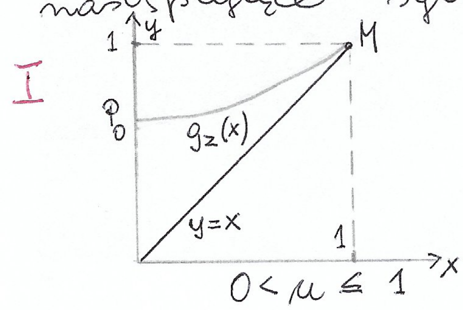
d-d Zauważmy, że szukane prawdop. π_0 można zapisać w postaci
$$\pi_0 = P(W) = \sum_{j=0}^{\infty} P(W \mid X_1 = j) \cdot P_j .$$
Przy warunku, że $X_1 = j$, wymarcie populacji następuje wtedy i tylko wtedy, gdy wymrze każda z j rodzin wywodzących się z osobników 1. generacji. Skoro zakładamy, że każda taka rodzina rozwija się niezależnie od pozostałych, a prawdopodobieństwo jej wymarcia wynosi π_0, to
$$P(W \mid X_1 = j) = \pi_0^j ,$$
czyli
$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j P_j \text{ lub równoważnie } \pi_0 = g_Z(\pi_0).$$
Oznacza to, że π_0 jest pewnym (nie koniecznie jedynym) rozwiązaniem równania $x = g_Z(x)$. (1.13)
Jeszcze inaczej, szukane prawdopodobieństwo jest odciętą punktu przecięcia krzywej $y = g_Z(x)$ z prostą $y = x$.

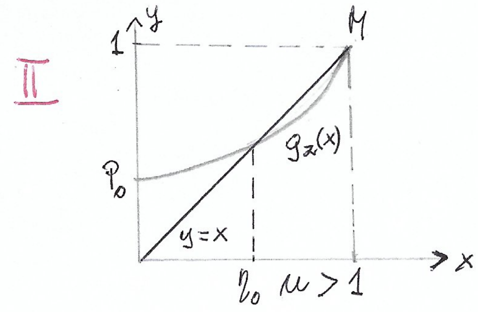
Pomijając oba trywialne przypadki, gdy
- $P_0 = 0$ (co oznacza, że populacja nie wymrze nigdy),
- $P_0 = 1$ (-"- , -"- -"- wymrze z P. 1),

zajmiemy się przypadkiem, gdy $0 < P_0 < 1$.

Zauważmy naprzód, że
$$g_Z'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \cdot P_k > 0 \quad \text{dla } x > 0$$
oraz
$$g_Z''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} P_k > 0 \quad \text{dla } x > 0,$$
co oznacza, że w przedziale $(0,1)$ funkcja $y = g_Z(x)$ jest rosnąca i wypukła. Z jej postaci widać również, że jest ciągła. W punkcie $x = 0$ przyjmuje wartość $g_Z(0) = P(Z=0) = P_0$, natomiast w $x = 1$ $g_Z(1) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$. Ponieważ $g_Z'(1) = E(Z) = \mu$ jest tangensem kąta nachylenia do osi OX stycznej do krzywej $y = g_Z(x)$ w punkcie $M(1,1)$, więc możliwe są dwie

następujące sytuacje:





W sytuacji I jest jasne, że jedynym rozwiązaniem (1.13) jest $\pi_0 = 1$, co dowodzi pierwszej tezy twierdzenia.
W sytuacji II równanie (1.13) spełniają dwie liczby: 1 oraz $\eta_0 < 1$. Pokażemy, że szukanym prawdop. π_0 jest $\eta_0 < 1$.
Niech $x_i = P(X_i=0)$, $i=1,2,\dots$. Wtedy

$$x_{i+1} = P(X_{i+1}=0) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{i+1}=0 \mid X_1=j)\cdot P_j = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_i=0)^j P_j = \sum_{j=0}^{\infty} x_i^j P_j = g_z(x_i). \qquad (1.14)$$

Ponadto, $x_0 = P(X_0=0)=0$, bo założyliśmy, że $X_0=1$. Zatem $x_0<\eta_0$. Ponieważ funkcja $g_z(x)$ jest rosnąca, więc z uwagi na (1.14) mamy

$$x_1 = g_z(x_0) < g_z(\eta_0) = \eta_0.$$

Stąd, znów stosując (1.14) otrzymujemy

$$x_2 = g_z(x_1) < g_z(\eta_0) = \eta_0, \text{ i.t.d}$$

$$x_{n+1} = g_z(x_n) < g_z(\eta_0) = \eta_0, \dots$$

Wnioskujemy stąd, że ciąg $\{x_n, n=0,1,\dots\}$ jest ograniczony przez η_0. Jest także rosnący, bo dla $x<\eta_0$ wykres funkcji $y=g_z(x)$ leży powyżej prostej $y=x$, a więc $x_n < g_z(x_n) = x_{n+1}$, $n=0,1,\dots$. Ciąg $\{x_n = P(X_n=0), n=0,1,..\}$ jako ograniczony i monotoniczny jest zatem zbieżny.
Niech $\pi = \lim_{n\to\infty} P(X_n=0)$. Porównując z (1.12) widzimy, że $\pi = \pi_0$, a ponieważ ciąg $\{x_n, n=0,1,\dots\}$ jest ograniczony przez η_0, więc także $\pi_0 \le \eta_0$. Skoro jednak π_0 spełnia równanie (1.13), więc $\pi_0 = \eta_0$ jest szukanym prawdopodobieństwem wymarcia populacji.

Przykład 1.7. Wyznaczmy prawdopodobieństwo wymarcia populacji, gdy

a) $P_0 = \frac{1}{2}$, $P_1 = P_2 = \frac{1}{4}$. Wtedy $\mu = E(Z) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$.

Na mocy tw. 1.20 $\pi_0 = 1$;

b) $P_0 = \frac{1}{4}$, $P_2 = \frac{3}{4}$. Wtedy $\mu = E(Z) = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} > 1$,

a więc π_0 jest mniejszym od 1 pierwiastkiem równania $g_Z(x) = x$, czyli $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} x^2 = x$.

Równoważnie $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

Równanie to ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{4+2}{6} = 1.$$

Zatem dla tej populacji prawdop. wymarcia

$$\pi_0 = \frac{1}{3}.$$