Rozdział 3. Proces odnowy

3.1. Strumień i proces odnowy; funkcja odnowy

Definicja 3.1.
Niech $\{Y_n, n=1,2,\dots\}$ będzie ciągiem nieujemnych niezależnych zm. losowych o jednakowym rozkładzie F takim, że $F(0)<1$.
Ciąg zm. losowych $\{S_n, n=0,1,\dots\}$ postaci

$$S_0 = 0, \qquad S_n = Y_1 + \dots + Y_n, \qquad n=1,2,\dots, \tag{3.1}$$

nazywamy (prostym) strumieniem odnowy, zmienną losową S_n – chwilą n. odnowy, a zmienną losową Y_n – czasem między (n-1). a n. odnową, $n=1,2,\dots$

Zmienne losowe Y_n, $n=1,2,\dots$, są najczęściej interpretowane jako czasy między kolejnymi ustalonymi zdarzeniami, np. awariami bądź naprawami obserwowanego urządzenia.

Definicja 3.2.
Procesem odnowy nazywamy proces liczący $\{N(t), t\geq 0\}$, gdzie $N(t)$ jest postaci:

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n) \tag{3.2}$$

dla S_n, $n=1,2,\dots$, określonych wzorem (3.1).
$N(t)$ oznacza więc liczbę odnów w czasie $[0,t]$.

Uwagi.

- Dla każdego t $\quad N(t)<\infty$ z P.1, $\qquad$ (3.3)
  tzw. w skończonym odcinku czasu może wystąpić skończona liczba odnów.

Rzeczywiście, z własności dystrybuanty F wynika, że $\mu = E(Y_1) > 0$. Ponadto, na mocy MPWL

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \quad \text{z P. 1}.$$

Zatem $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ z P.1, czyli dla ustalonego t : $S_n \le t$ dla co najwyżej skończonej liczby n z P. 1.

- Jednocześnie $N(\infty) = \lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ z P.1, $\quad (3.3')$

ponieważ

$$P(N(\infty) < \infty) = P(\exists_n : Y_n = \infty) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (Y_n = \infty)\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n = \infty) = 0.$$

Definicja 3.3.

Funkcją odnowy nazywamy średnią (oczekiwaną) liczbę odnów w czasie $[0,t]$:

$$m(t) = E(N(t)). \qquad (3.4)$$

Stąd

$$m(t) = E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t). \qquad (3.4')$$

Zauważmy dalej, że między wprowadzonymi zm. losowymi zachodzą następujące relacje:

- $$\{N(t) \ge n\} = \{S_n \le t\}, \qquad (3.5)$$

ponieważ wzór definicyjny (3.2) oznacza, że

$$N(t) = \max\{n : S_n \le t\}. \qquad (3.2')$$

Skoro więc $\{N(t) = n\} = \{N(t) \ge n\} \setminus \{N(t) \ge n+1\}$, mamy zatem na mocy (3.5)

- $P(N(t)=n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) =$
$$P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t). \quad (3.6)$$
- Jeśli dla ustalonego t $N(t) \geq 1$, to
$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1} \quad \text{z P. 1}, \quad (3.7)$$

gdzie $S_{N(t)}$ – chwila ostatniej odnowy do chwili t włącznie,
$S_{N(t)+1}$ – " – pierwszej odnowy po chwili t.

Można pokazać, że

- funkcja odnowy jednoznacznie określa proces odnowy, tzn. istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między $m(t)$ a rozkładem F;
- dla każdego t $m(t) < \infty$
- jeśli F ma gęstość f, to prawdziwe jest tzw. równanie odnowy: $m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) f(x)\,dx$

(jest to zadanie z l.3).

Przykład 3.1.

Niech w procesie odnowy $\{N(t), t \geq 0\}$
$$m(t) = 5t, \quad t \geq 0.$$
Wyznaczmy rozkład liczby odnów, które miały miejsce do chwili $t=4$.

Z uwagi o jednoznacznym określeniu procesu odnowy (rozkładu F) przez funkcję odnowy $m(t)$ oraz na mocy def. 2.1. pr. Poissona widzimy, że $\{N(t), t \geq 0\}$ jest pr. Poissona z intensywnością $\lambda = 5$, a zatem
$$N(t) \sim \mathcal{P}(5t).$$
W szczególności $P(N(4)=k) = e^{-20} \cdot \frac{20^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$

3.2. Twierdzenia graniczne i ich zastosowania

Zajmiemy się teraz granicznym ($t \to \infty$) zachowaniem procesu odnowy i funkcji odnowy.

Twierdzenie 3.4. Z P. 1 zachodzi zbieżność:

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{1}{\mu}. \qquad (3.8)$$

d-d (Ross, str. 428.)

Uwaga.
Powyższa teza pozostaje prawdziwa, gdy $\mu = \infty$ i oznacza, że $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ z P. 1.

Wielkość $\frac{1}{\mu}$ nazywamy intensywnością pr. odnowy.

Twierdzenie 3.5 (Elementarne twierdzenie odnowy)

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{1}{\mu}. \qquad (3.9)$$

Uwaga.
Chociaż $\frac{m(t)}{t} = E\left(\frac{N(t)}{t}\right)$, to (3.9) nie jest oczywiście bezpośrednim wnioskiem z (3.8).
Jak wiadomo bowiem, zbieżność z P. 1 nie implikuje zbieżności wartości oczekiwanych.

d-d (3.9) w przypadku, gdy F ma gęstość f.

1° Ustalimy związek między $m(t)$ a $E(S_{N(t)+1})$.

Niech $g(t) = E\left(S_{N(t)+1}\right)$.

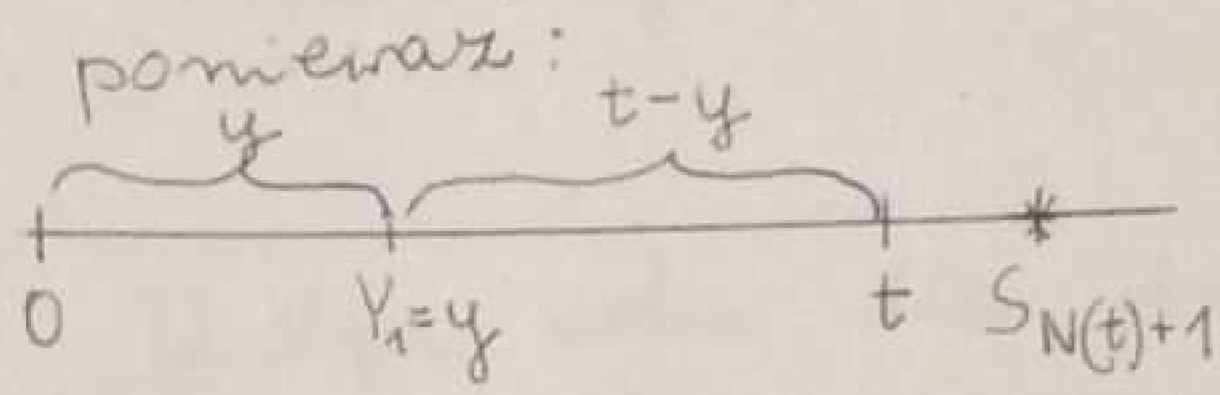
Warunkując względem chwili pierwszej odnowy, mamy

$$g(t) = \int_0^\infty E\left(S_{N(t)+1} \mid Y_1 = y\right) f(y)\, dy, \qquad (*)$$

przy czym

$$E\left(S_{N(t)+1} \mid Y_1 = y\right) = \begin{cases} g(t-y)+y, & \text{jeśli } y<t, \\ y, & \text{-"- } y>t, \end{cases}$$

ponieważ:



Wstawiając powyższe wyrażenia na $E(S_{N(t)+1} \mid Y_1=y)$ do (*), otrzymujemy

$$g(t) = \int_0^t \left(g(t-y)+y\right) f(y)\,dy + \int_t^\infty y f(y)\,dy = \int_0^t g(t-y) f(y)\,dy + \int_0^\infty y f(y)\,dy .$$

Równoważnie $g(t) = \mu + \int_0^t g(t-y) f(y)\,dy$. (**)

Przyjmując oznaczenie $g_1(t) = \frac{g(t)}{\mu} - 1$ równość (**) zapisujemy jako $g_1(t)+1 = 1 + \int_0^t \left(g_1(t-y)+1\right) f(y)\,dy$

lub $g_1(t) = F(t) + \int_0^t g_1(t-y) f(y)\,dy$.

Równość ta oznacza, że funkcja $g_1(t) = \frac{E(S_{N(t)+1})}{\mu} - 1$ spełnia równanie odnowy, a więc musi być równa funkcji odnowy $m(t)$.

Szukany związek między $m(t)$ a $E(S_{N(t)+1})$ jest więc postaci: $E(S_{N(t)+1}) = \mu(m(t)+1)$.

2°. Na mocy (3.7) wiemy, że dla każdej ustalonej chwili t zachodzi z P.1: $t < S_{N(t)+1}$,

a stąd i z powyższego $t < E(S_{N(t)+1}) = \mu(m(t)+1)$,

czyli $$\frac{m(t)}{t} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$$

Zatem $\liminf\limits_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$.

3°. Pokażemy jeszcze, że $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$, co zakończy dowód.

W tym celu dla dowolnej stałej $c>0$ zdefiniujmy

$$Y_i^c = \min(Y_i, c) = \begin{cases} Y_i, & Y_i \leq c \\ c, & Y_i > c \end{cases}$$

i rozważmy proces odnowy $\{N^c(t), t \geq 0\}$ określony przez strumień odnowy $S_n^c = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^c$, gdzie Y_i^c oznacza odstęp czasu między $(i-1)$. a i. odnową.

Ponieważ $Y_i^c \leq c$, $i=1,2,\dots$, z P. 1,

więc $S^c_{N^c(t)+1} \leq t + c$ z P. 1.

Z części 1° dowodu wiemy, że $E\left(S^c_{N^c(t)+1}\right) = \mu^c\left(m^c(t)+1\right)$,

gdzie $\mu^c = E(Y_i^c)$, $m^c(t) = E(N^c(t))$.

Ponieważ nierówność $Y_i^c \leq Y_i$ powoduje, że $N^c(t) \geq N(t)$ z P. 1, a więc dla każdego t $m^c(t) \geq m(t)$, zatem mamy

$$t + c \geq \mu^c\left(m^c(t)+1\right) \geq \mu^c\left(m(t)+1\right).$$

Równoważnie $\frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu^c} + \frac{1}{t}\left(\frac{c}{\mu^c} - 1\right)$,

a stąd $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu^c}$ dla dowolnej stałej $c>0$.

Ponieważ $\lim\limits_{c\to\infty} \mu^c = \lim\limits_{c\to\infty} \int_0^c \left(1-F(x)\right)dx = \int_0^\infty \left(1-F(x)\right)dx = \mu$,

więc przechodząc w powyższej nierówności z $c \to \infty$,

mamy $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leq \lim\limits_{c\to\infty} \frac{1}{\mu^c} = \frac{1}{\mu}$.

Przykład 3.2

Przypuśćmy, że pewne urządzenie zostaje wymienione kiedy albo zepsuje się, albo osiągnie wiek 5 miesięcy oraz że czasy bezawaryjnego działania takich urządzeń są niezależnymi zm. losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[1,7]$.

Przyjmijmy ponadto, że następne urządzenie jest dostępne od razu, gdy poprzednie dotrwa do „wieku" 5 miesięcy, ale trzeba na nowe czekać 1 miesiąc, gdy stare zepsuje się wcześniej.

Wprowadzając odpowiedni proces odnowy obliczmy

a) średni czas między kolejnymi wymianami tego urządzenia;

b) intensywność tego procesu odnowy.

Niech $N(t)$ oznacza liczbę wymian urządzenia do chwili t, $t \geq 0$, Y – czas między wymianami, X – czas „życia" (tzn. bezawaryjnego działania) urządzenia.

Z założenia $X \sim \mathcal{U}[1,7]$, czyli $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 1 \leq x \leq 7, \\ 0, & \text{poza}. \end{cases}$

Natomiast $Y = \begin{cases} 5, & X \geq 5; \\ X+1, & X < 5. \end{cases}$

Zatem mamy:

a) $\mu = EY = \int_1^5 (x+1) f(x)\, dx + 5 \cdot P(X \geq 5) =$
$$\frac{1}{6}\int_1^5 (x+1)\, dx + 5 \cdot \int_5^7 \frac{1}{6}\, dx = \frac{13}{3};$$

b) $\frac{1}{\mu} = \frac{3}{13}$.

3.3. Złożony proces odnowy (proces odnowy wpłat)

Rozważmy strumień odnowy $\{S_n, n=0,1,\ldots\}$ taki, że z chwilą każdej odnowy S_n związane jest zm. losowa R_n, zwana <u>wpłatą</u> (<u>nagrodę</u>). Jeśli $R_n \le 0$, to interpretujemy ją jako <u>koszt</u> (<u>karę</u>).

Załóżmy, że $\{R_n, n=1,2,\ldots\}$ jest ciągiem niezależnych jednakowo rozłożonych zm. losowych, choć niekoniecznie niezależnych od $\{S_n, n=1,2,\ldots\}$

<u>Definicja 3.6.</u> Proces stochastyczny $\{R(t), t\ge 0\}$ dla

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n \qquad (3.10)$$

nazywamy <u>złożonym procesem odnowy</u>.

$R(t)$ jest zatem całkowitą kwotą opłat zgromadzoną w czasie $[0,t]$.

Niech $\varrho = E(R_1)$, czyli niech oznacza średnią wpłatę.

<u>Twierdzenie 3.7</u> Jeśli $\varrho < \infty$ oraz $\mu < \infty$, to z P.1 zachodzi zbieżność

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\varrho}{\mu}. \qquad (3.11)$$

<u>d-d</u> (Ross, str. 440)

<u>Uwagi</u>

i) Zauważmy, że przy przyjętych założeniach istnieje z P.1 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = r$ - tzw. <u>intensywność opłat.</u>

ii) Jeśli odstępy czasu między kolejnymi odnowami nazwiemy <u>cyklami</u>, to teza tw. 3.7 oznacza, że intensywność wpłat (<u>średnia wpłata w długim horyzoncie czasowym</u>) jest równa oczekiwanej wpłac uzyskanej w ciągu 1 cyklu podzielonej przez oczekiwaną długość tego cyklu.

Przykład 3.3 (Ross, przykład 7.12).

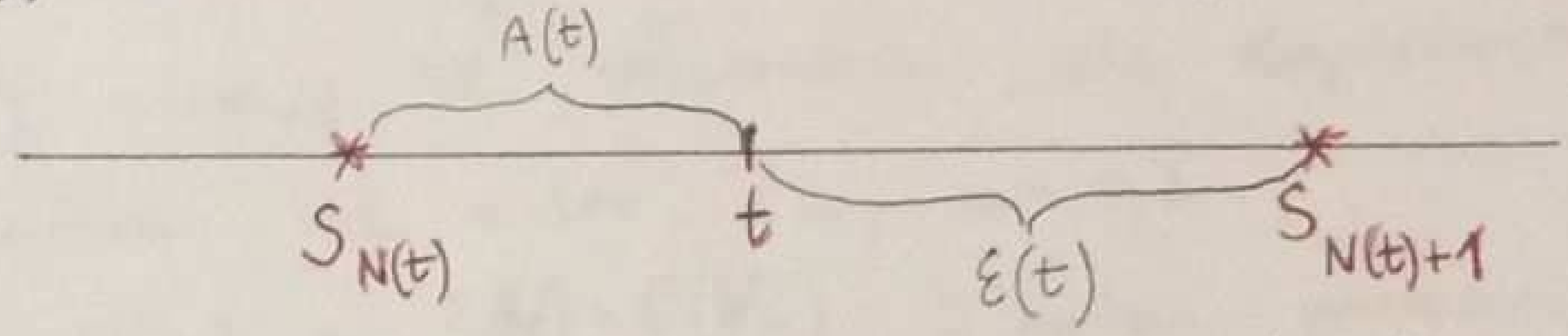
3.4. Procesy związane z procesem odnowy

Z procesem odnowy $\{N(t), t \geq 0\}$ łączą się:

- proces „wieku" $\{A(t), t \geq 0\}$,
- proces „resztowy" $\{\varepsilon(t), t \geq 0\}$,

gdzie $A(t)$ - czas od ostatniej odnowy do chwili t,
$\varepsilon(t)$ - czas od chwili t do następnej odnowy,

czyli



Z powyższego rysunku, a także w świetle relacji (3.7) widzimy, że z P. 1

$$\varepsilon(t) = S_{N(t)+1} - t,$$
$$A(t) = t - S_{N(t)},$$

a także
$$A(t) + \varepsilon(t) = Y_{N(t)+1}.$$

Uwaga.
Jeśli odnowa oznacza zastąpienie zepsutego urządzenia sprawnym, to $A(t)$ odpowiada czasowi działania, czyli „wiekowi" tego nowego urządzenia w chwili t, natomiast $\varepsilon(t)$ - reszcie czasu (do awarii i natychmiastowego zastąpienia nowym), przez który urządzenie to pozostanie sprawne.

Można pokazać (Ross, str. 445), że średnia wartość wieku procesu odnowy rozumiana jako

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \int_0^s A(t)\,dt \quad \text{wynosi} \quad \frac{E(Y^2)}{2E(Y)} \quad \text{z P.1.}$$

Podobnie
$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \int_0^s \varepsilon(t)\,dt = \frac{E(Y^2)}{2E(Y)} \quad \text{z P.1.}$$

Innym procesem związanym z procesem odnowy jest tzw. alternujący proces odnowy modelujący system, który znajduje się w jednym z dwóch stanów. Oznaczamy je umownie „+" oraz „−" (ang. „on" − „off" tzw. włączony − wyłączony, sprawny − zepsuty).
Na początku proces znajduje się w stanie „+" i pozostaje w nim przez losowy czas Z_1, po czym przechodzi do stanu „−" i przebywa w nim losowy czas W_1. Następnie przez czas Z_2 jest w stanie „+", a potem przez czas W_2 w stanie „−", i t.d.
Załóżmy, że wektory (Z_n, W_n), $n=1,2,\dots$, są niezależne o jednakowym rozkładzie, z czego wynika, że ciągi $\{Z_n, n=1,2,\dots\}$ oraz $\{W_n, n=1,2,\dots\}$ mają te same własności, ale dopuszczamy, żeby zm. losowa W_n była zależna od zm. losowej Z_n, $n=1,2,\dots$.
Niech $E(Z)=E(Z_n)$, $E(W)=E(W_n)$, $n=1,2,\dots$ Z opisu procesu widzimy, że jest to proces odnowy, a kolejne odnowy występują w chwilach przechodzenia procesu do stanu „+". Zatem Y_n − czas trwania (długość) n. cyklu tego procesu wynosi $Y_n = Z_n + W_n$, $n=1,2,\dots$

Wyznaczymy frakcję czasu, przez który w długim horyzoncie czasowym proces ten przebywa w stanie „+" (w stanie „−"), czyli wielkość P_+ (P_-).

Uwaga
$$P_+ = \frac{E(Z)}{E(Z)+E(W)} \quad \text{oraz} \quad P_- = \frac{E(W)}{E(Z)+E(W)} \tag{3.12}$$

d-d (Ross, str. 447/451)

Zastosujemy teraz wzór (3.12) do wyznaczenia frakcji czasu, przez który w długim horyzoncie czasowym wiek $A(t)$ danego procesu odnowy nie przekracza ustalonego poziomu c.

W tym celu określamy alternujący proces odnowy przyjmując, że jest on w chwili t w stanie „+", jeśli $A(t) < c$ oraz w stanie „−", gdy zachodzi zdanie przeciwne: $A(t) \geq c$. Jeśli więc zm. losowa Y oznacza długość cyklu wyjściowego procesu odnowy, to na mocy (3.12) szukana wielkość wynosi

$$p_c^A = \frac{E(Z)}{E(Y)},$$

gdzie Z oznacza czas przebywania procesu alternującego w stanie „+", czyli

$$Z = \begin{cases} Y, & Y \leq c \\ c, & Y > c \end{cases} = \min(Y, c) = Y^c.$$

Stąd $$p_c^A = \frac{E(Y^c)}{E(Y)} = \frac{1}{E(Y)} \int_0^c (1 - F(x))\, dx = \frac{1}{\mu} \int_0^c (1 - F(x))\, dx. \quad (3.13)$$

Tak samo dla czasu resztowego $\varepsilon(t)$ mamy

$$p_c^\varepsilon = \frac{1}{\mu} \int_0^c (1 - F(x))\, dx.$$

Inny przykład zastosowania wzoru (3.12) dotyczy pewnego zagadnienia kontroli zapasów.

Przykład 3.4. (Zagadnienie Fincha ze schematem $(s, s+S)$ uzupełniania zapasów).

Przypuśćmy, że klienci przybywają do hurtowni niezależnie od siebie w odstępach czasu Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, i składają zamówienie (niezależne od chwili przybycia) na losową ilość towaru n_i, $i = 1, 2, \ldots$, określoną dystrybuantą H, przy czym zm. losowe $n_1, n_2, \ldots$, są niezależne. Zapas towaru w hurtowni jest uzupełniany według schematu $(s, s+S)$, tzn. jeśli tylko poziom zapasu towaru spadnie poniżej wielkości s, to natychmiast uzupełnia się go do poziomu $s+S$.

Chcemy, dla ustalonej wartości y : $s \le y \le s+S$, wyznaczyć frakcję czasu, przez którą w długim horyzoncie czasowym zapas towaru utrzymuje się na poziomie nie mniejszym niż y (ozn. p_y), inaczej prawdopodobieństwo tego, że w dowolnej (losowo wybranej chwili) poziom towaru jest nie mniejszy niż y.

W tym celu określimy odpowiedni proces alternujący, a szukane prawdopodobieństwo p_y wyznaczymy ze wzoru (3.12).

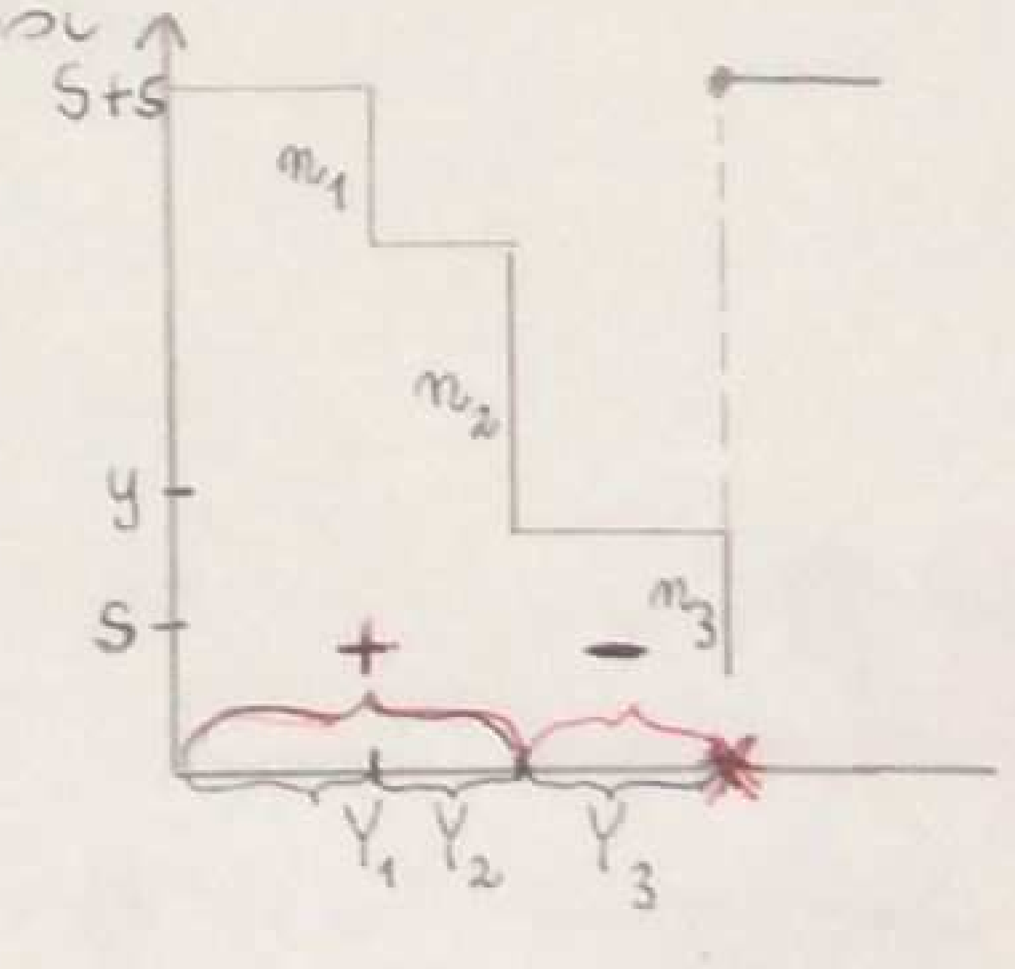
Przyjmiemy mianowicie, że proces znajduje się w stanie „+”, gdy zapas towaru jest na poziomie wynoszącym co najmniej y, oraz w stanie „−” w przeciwnym razie, a odnowom odpowiadają chwile uzupełniania zapasu do poziomu $s+S$.

Ponadto, niech $N_x = \min(k : n_1 + \ldots + n_k > S+s-x)$ oznacza numer klienta w cyklu, którego zamówienie obniża zapas towaru poniżej x. Wtedy klient o numerze N_y to klient, który potrzebuje takiej ilości towaru, że poziom zapasu spada poniżej y, a więc powoduje przejście procesu alternującego ze stanu „+” do stanu „−”. Klient N_s kończy zatem cykl. Stąd czas przebywania procesu w okresie jednego cyklu w stanie „+” wynosi

$$Z = \sum_{i=1}^{N_y} Y_i,$$

a długość całego cyklu to

$$Z + W = \sum_{i=1}^{N_s} Y_i.$$



Z założenia o niezależności ciągów $\{Y_i,\ i=1,2,\ldots\}$ oraz

$\{\eta_i, i=1,2,\dots\}$, a więc niezależności zm. losowych N_y i N_S od ciągu $\{Y_i, i=1,2,\dots\}$ mamy

$$E(Z) = E(Y_1)\cdot E(N_y) \qquad (*)$$

oraz
$$E(Z+W) = E(Y_1)\cdot E(N_S).$$

Dla wyznaczenia szukanego p_y wystarczy więc obliczyć $E(N_y)$. Z określenia zm. losowej N_y zauważmy, że

$$N_y = k \iff \eta_1+\dots+\eta_{k-1} \le S+s-y < \eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k.$$

Stąd
$$P(N_y=k) = P(\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k > S+s-y) - P(\eta_1+\dots+\eta_{k-1} > S+s-y) =$$
$$= 1-P\Big(\sum_{k=1}^{k}\eta_i \le S+s-y\Big) - 1 + P\Big(\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i \le S+s-y\Big) =$$
$$H^{*(k-1)}(S+s-y) - H^{*k}(S+s-y),$$

przy czym dla $k=1$ ta różnica jest równa
$$H^{*0}(S+s-y) - H^{*1}(S+s-y) = 1-H(S+s-y).$$

Ostatecznie mamy zatem
$$E(N_y) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(N_y=k) = 1-H(S+s-y) + 2H(S+s-y) - 2H^{*2}(S+s-y) +$$
$$+ 3H^{*2}(S+s-y) - 3H^{*3}(S+s-y) + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} H^{*k}(S+s-y).$$

Przypomnijmy (wzór 3.4'), że $\sum_{k=1}^{\infty} H^{*k}(t)$ jest funkcją odnowy (funkcją średniej) procesu, w którym odstępy między odnowami mają dystrybuantę H.

$E(N_y)$ możemy więc zapisać jako
$$E(N_y) = 1 + m(S+s-y),$$
a stąd na mocy $(*)$ i wzoru (3.12)
$$p_y = \frac{m(S+s-y)+1}{m(S)+1}. \qquad (3.14)$$

W szczególności, jeśli $\eta_i \sim \mathcal{E}(\mu)$, to mamy proces Poissona, w którym $m(t)=\mu t$. Wzór (3.14) jest więc postaci
$$p_y = \frac{\mu(S+s-y)+1}{\mu S+1}. \qquad (3.14')$$